



20. Mai 2011

Mathematik für Physiker II

5. Übungsblatt

Aufgabe 5.1 Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Sei $x_0 \in [a, b]$. Zeigen Sie:

a) $\tilde{f}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} f(x), & x \neq x_0, \\ c, & x = x_0, \end{cases}$ $c \in \mathbb{R}$ fest, ist eine Regelfunktion.

b) Es gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \tilde{f}(x) dx.$$

c) Die Dirichlet-Funktion $D: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$ ist keine Regelfunktion.

Aufgabe 5.2 Sei $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Es gebe ein $C > 0$ so, dass $|f'(x)| \leq C$ für alle $x \in (0, \infty)$ gilt. Beweisen Sie, dass dann f in $(0, \infty)$ gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 5.3 Berechnen Sie die nachfolgenden unbestimmten Integrale, ohne eine Formelsammlung zu verwenden:

a) $\int x^2 \ln x dx, x > 0,$

b) $\int \frac{x^3 - 2x^2 + x + 5}{x^2 - 1} dx,$

c) $\int \frac{2x}{\tan(x^2)} dx,$

d) $\int \frac{1}{a^x + a^{-x}} dx, a > 0.$

Aufgabe 5.4 Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz:

a) $\int_0^\infty e^{-sx} \cos(x) dx, s \in \mathbb{R},$

b) $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx,$

c) $\int_1^\infty \frac{1}{1+x^4} dx,$

d) $\int_0^\infty \sin(x) dx.$