Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Michael Pokojovy

31. Mai 2011

Mathematik für Physiker II

7. Übungsblatt

Aufgabe 7.1 a) Berechnen Sie:

i) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{e^{-\lambda x}}^{e^{\lambda x}} e^{-(x-y)^2}\mathrm{d}y$, $x \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, *ii)* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\frac{1}{x}}^{x} \ln(x^2+y^2+1)\mathrm{d}y$, $x > 1$.

b) Sei $K \in \mathcal{C}^1([0,1]\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ eine Funktion mit $K, \partial_x K \in L^\infty([0,1]\times\mathbb{R})$. Beweisen Sie: die Abbildung

$$\mathcal{F}\colon \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \quad \varphi \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\varphi(\cdot)} K(\cdot,y)\mathrm{d}y$$

ist stetig, d. h., es gibt ein $C > 0$ so, dass

$$\|\mathcal{F}\varphi\|_{\mathcal{C}^0([0,1])} \le C\|\varphi\|_{\mathcal{C}^1([0,1])}$$

für alle $\varphi \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, wobei

$$\|\cdot\|_{\mathcal{C}^0([0,1])} = \max_{x\in[0,1]} |\cdot(x)|, \quad \|\cdot\|_{\mathcal{C}^1([0,1])} = \max_{x\in[0,1]}(|\cdot(x)| + |\cdot'(x)|).$$

Aufgabe 7.2 Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Beweisen Sie, dass der Raum $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ der stetigen Funktionen dicht im Raum $\mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$ der Regelfunktionen bzgl. $\|\cdot\|_{L^2((a,b))}$ liegt.

Hinweis: Zeigen Sie, dass sich eine Treppenfunktion beliebig gut durch einen Polygonzug in $\|\cdot\|_{L^2((a,b))}$ annähern lässt.

Aufgabe 7.3 Gegeben sei eine Folge $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Wegen, welche für $k \in \mathbb{N}$ durch

$$\gamma_k\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) + \frac{1}{k}\cos(kt) \\ \sin(t) + \frac{1}{k}\sin(kt) \end{pmatrix}$$

definiert sind.

a) Bestimmen Sie, ob die Folge im $\mathcal{C}^0$- und/oder $\mathcal{C}^1$-Sinne konvergiert. Wie lautet ggf. der Grenzwert γ?

b) Berechnen Sie die Kurvenlängen $L(\gamma_k)$, $k \in \mathbb{N}$, und ggf. $L(\gamma)$.

c) Zeichnen Sie die Wertebereiche von γ_1, γ_4 und ggf. γ.

Aufgabe 7.4 Die logarithmische Spirale kann als Bild der Kurve $\gamma\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \begin{pmatrix} re^{\omega t}\cos(t) \\ re^{\omega t}\sin(t) \end{pmatrix}$, beschrieben werden, wobei $r > 0$, $\omega < 0$ konstant sind.

a) Bestimmen Sie Bogenlänge und Krümmung für γ.

b) Hat die Kurve γ endliche Länge?

c) Zeigen Sie, dass $\gamma(t)$ für $t \to \infty$ gegen 0 konvergiert.

Abgabe: Freitag, 10. Juni 2011, in der Vorlesung.