Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Michael Pokojovy

21. Juni 2011

Mathematik für Physiker II

10. Übungsblatt

Aufgabe 10.1 Es seien $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x,y \geq 0, x+y \leq 1\}$ und $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x+y,y)$ definiert.

a) Beweisen Sie

$$\int_D f(x+y)\mathrm{d}(x,y) = \int_{A(D)} f(s)\mathrm{d}(s,t) = \int_0^1 f(s)s\mathrm{d}s.$$

b) Berechnen Sie

$$\int_D (x+y)^2 e^{(x+y)^2} \mathrm{d}(x,y).$$

Aufgabe 10.2 Für $r_0, r, h > 0$, $r_0 < r$, seien die Menge $U := \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, r_0 \leq |x| \leq r\}$ und die Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$, $x \mapsto h\,(1 - \frac{|x|}{r})$ definiert. Zeigen Sie, dass

$$S := \{(x, f(x)) \,|\, x \in U\}$$

eine Fläche ist, und berechnen Sie das Oberflächenintegral $\int_S 1\,\mathrm{d}\sigma$.

Aufgabe 10.3 Zeigen Sie, dass

$$S := \{\Phi(u) \,|\, u \in U := [0,1]^2\} \text{ mit } \Phi\colon U \to \mathbb{R}^3,\ u \mapsto \begin{pmatrix} u_1(u_2+1) \\ u_2^2 \\ e^{u_1-u_2} \end{pmatrix}$$

ein Flächenstück ist, und berechnen Sie den Einheitsnormalenvektor $n(x)$ zu S an jeder Stelle $x \in S$.

Aufgabe 10.4 Beweisen Sie

$$\int_\Omega \mathrm{div}F(x)\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \langle F(x), n(x)\rangle \mathrm{d}\sigma,$$

indem Sie beide Integrale explizit berechnen, wobei $\Omega := B(0,R) \subset \mathbb{R}^3$, $R > 0$, und $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dabei ist $n(x)$ für $x \in \partial\Omega$ stets der nach außen gerichtete Einheitsnormalenvektor zur Oberfläche $\partial\Omega$ am Punkt x.

Abgabe: Freitag, 1. Juli 2011, in der Vorlesung.