Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Michael Pokojovy

1. Juli 2011

Mathematik für Physiker II

11. Übungsblatt

Aufgabe 11.1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit $0 \notin \Omega$ und sei $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ eine Testfunktion, d. h., φ ist unendlich oft differenzierbar und sein Träger $\operatorname{supp} \varphi = \overline{\{x \in \Omega \,|\, \varphi(x) \neq 0\}}$ ist kompakt. Beweisen Sie

$$\int_\Omega \ln(|x|) \triangle \varphi(x) \mathrm{d}x = 0.$$

Aufgabe 11.2 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet. Seien $u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$, $\sigma, \varepsilon \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^{2\times 2})$ das Verschiebungs-, Spannungs- bzw. Verzerrungsvektorfeld eines den Bereich Ω belegenden elastischen Festkörpers. Sei $f \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}^2)$ eine auf den Körper wirkende Volumenkraft und seien $\lambda, \mu > 0$ die Lamé-Konstanten. Es gelte:

i) $\varepsilon(x) = \frac{1}{2}(\nabla u(x) + (\nabla u(x))')$, $x \in \Omega$ (Green-Lagrangescher Verzerrungstensor),

ii) $\sigma(x) = 2\mu\varepsilon(x) + \lambda \operatorname{spur}(\varepsilon) I_2$ (Hookesches Gesetz für homogene, isotrope Medien),

iii) $\int_{\partial\Omega'} \sigma(x)n(x)\mathrm{d}s + \int_{\Omega'} f(x)\mathrm{d}x = 0$ für alle Gaußnormalgebiete $\Omega' \subset \Omega$ (Gleichgewichtsbedingung).

Beweisen Sie die Gültigkeit von

a) $\varepsilon(x) = (\varepsilon(x))'$, $\sigma(x) = (\sigma(x))'$, $x \in \Omega$ (Symmetrie der beiden Tensoren),

b) $-\mathrm{div}\, \sigma(x) = f(x)$, $x \in \Omega$ (Erhaltungsgesetz),

c) $-\mu\triangle u(x) - (\lambda + \mu)\nabla \mathrm{div}\, u(x) = f(x)$, $x \in \Omega$ (Lamé-Gleichungen),

wobei $\nabla u = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} u_1 & \partial_{x_1} u_2 \\ \partial_{x_2} u_1 & \partial_{x_2} u_2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{div}\, \sigma = \begin{pmatrix} \partial_{x_1}\sigma_{11} + \partial_{x_2}\sigma_{21} \\ \partial_{x_1}\sigma_{12} + \partial_{x_2}\sigma_{22} \end{pmatrix}$ und $\triangle u = \begin{pmatrix} \triangle u_1 \\ \triangle u_2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 11.3 Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, eine Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Beweisen Sie:

a) Ist A über $\mathbb{K}$ diagonalisierbar, so gilt $\operatorname{spur}(A) = \sum_{k=1}^n \lambda_k$, $\det(A) = \prod_{k=1}^n \lambda_k$.

b) Gilt $\lambda_j \neq \lambda_k$ für $j \neq k$, so ist A genau dann positiv definit, wenn $\lambda_k > 0$ für alle $k = 1, \ldots, n$ gilt.

Aufgabe 11.4 Seien $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 8 \\ 2 & -2 & 10 \\ 8 & 10 & -5 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A_1 und A_2.

b) Bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} A_1^n x$ für $x = (2, 0, 1)'$.

c) Berechnen Sie $(\frac{1}{9})^{2011} A_2^{2011}$.

Abgabe: Freitag, 8. Juli 2011, in der Vorlesung.