Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Dipl.-Math. Michael Pokojovy

19. Oktober 2007

Mathematik für Physiker III
2. Übungsblatt

Aufgabe 2.1 Seien $f, g \in C^0([-1,1])$ mit $f(t) \leq 1$ und $g(t) \geq 1$ für alle $t \in [-1,1]$. Die folgenden Differentialgleichungen lassen sich mit Mitteln aus Analysis I und II lösen. Beweisen Sie jeweils Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung $u \in C^1([-1,1])$ mit $u(0) = 1$.

a) $\dfrac{u'(t)}{u(t)^2} = t$

b) $\cos(t)u'(t) - \sin(t)u(t) = \tan(t)^2 + 1$

c) $g\big(u(t)\big)u'(t) = f(t)$

Aufgabe 2.2 (Bedingung von Rosenblatt)

a) Es sei $B := \{u \in \mathcal{C}([0,h], \mathbb{R}^n) : \|u\| < \infty\}$ mit

$$\|u\| := \sup_{t \in (0,h]} \frac{|u(t)|}{t}.$$

Zeigen Sie, dass $(B, \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist.

b) Die Funktion $f\colon [0,h] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig und genüge in $(0,h] \times \mathbb{R}^n$ der Abschätzung

$$\big|f(t,y) - f(t,x)\big| \leq \frac{\varrho}{t}|y - x|.$$

für ein $\varrho < 1$. Beweisen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y'(t) = f\big(t, y(t)\big),\ y(0) = y_0$$

genau eine Lösung besitzt.

Hinweis: Man wende den Fixpunktsatz auf den Operator $T\colon B \longrightarrow B$ mit $(Tu)(t) := \int_0^t f\,(s, y_0 + u(s))\ \ ds$ an.

Aufgabe 2.3 Unter Benutzung eines Existenzsatzes finden Sie jeweils alle $(t,y) \in \mathbb{R}^2$, durch welche genau eine Lösungskurve folgender Differentialgleichungen verläuft:

a) $y' = 2ty + y^2$,

b) $y' = 1 + \tan y$,

c) $(y - t)y' = y \ln t$,

d) $ty' = y + \sqrt{y^2 - t^2}$.

Abgabetermin: Freitag, 26. Oktober 2007, vor der Vorlesung.