Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Dipl.-Math. Michael Pokojovy

30. November 2007

Mathematik für Physiker III

8. Übungsblatt

Definition 8.1 Eine Abbildung $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ bezeichnet man als einen globalen Fluss auf $\mathbb{R}^n$, falls $\Phi(t,\cdot) \circ \Phi(s,\cdot) = \Phi(t+s,\cdot)$ für alle $t, s \in \mathbb{R}$ und $\Phi(0,\cdot) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ gilt.

Definition 8.2 Zu einem glatten Fluss $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ heißt $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $x \longmapsto \lim_{t\to 0} \frac{\Phi(t,x)-x}{t} = \frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,x)|_{t=0}$ der Generator.

Aufgabe 8.1 Zeigen Sie, dass durch $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

a) $\Phi(t,x) = (e^t x_1, e^t x_2)$

b) $\Phi(t,x) = (e^t x_1, e^{-t} x_2)$

c) $\Phi(t,x) = (x_1, tx_1 + x_2)$

d) $\Phi(t,x) = (e^{-t} x_1, (tx_1 + x_2)e^{-t})$

globale Flüsse auf $\mathbb{R}^2$ definiert werden. Bestimmen Sie Generatoren f für obige Beispiele.

Aufgabe 8.2 Finden Sie alle singulären Punkte der angegebenen Systeme

a) $\dot{x} = 2x + y$, $\dot{y} = x + y$

b) $\dot{x} = 2x + 2y$, $\dot{y} = x + y$

c) $\dot{x} = x^2 - y$, $\dot{y} = x - y^2$

Aufgabe 8.3 Stellen Sie den Stabilitätscharakter des (einzigen) singulären Punktes $(0,0)$ fest und entwerfen Sie ein Phasenporträt:

a) $\dot{x} = 2x$, $\dot{y} = 4x + y$

b) $\dot{x} = -x - 2y$, $\dot{y} = 4x - 5y$

c) $\dot{x} = 2x + 4y$, $\dot{y} = -2x + 6y$

d) $\dot{x} = 2x - 4y$, $\dot{y} = 2x - 2y$

Aufgabe 8.4 Mithilfe der Ljapunowschen Methode decken Sie den Stabilitätscharakter des isolierten singulären Punktes $(0,0)$ folgender Systeme auf:

a) $\dot{x}_1 = -3x_2 - x_1^3$, $\dot{x}_2 = 3x_1 - 5x_2^3$

b) $\dot{x}_1 = -2x_1 x_2$, $\dot{x}_2 = x_1^2 - x_2^3$

Hinweis: Benutzen Sie den Ansatz $E(x) := Ax_1^2 + Bx_2^2$ für geeignete A und B

Abgabetermin: Freitag, 7. Dezember, vor der Vorlesung.