Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Dipl.-Math. Michael Pokojovy

9. November 2007

Mathematik für Physiker III
5. Übungsblatt

Aufgabe 5.1 Gegeben sei das folgende lineare System

$$\begin{aligned} x' &= a(t)x - b(t)y, \\ y' &= b(t)x + a(t)y. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass dieses System auf eine einzige lineare Gleichung

$$z'(t) = c(t)z$$

für $z(t) = x(t) + iy(t)$ zurückführbar ist.

b) Leiten Sie für $v(t) := |z(t)|^2 = x^2(t) + y^2(t)$ eine lineare Differentialgleichung ab.

c) Mit der Methode a) lösen Sie das System für $a(t) = \cos(t)$ und $b(t) = \sin(t)$.

d) Skizzieren Sie in der xy-Ebene die „Bahnkurve“ $z(t) = (x(t), y(t))$ der Lösung mit $(x(0), y(0)) = (1, 0)$. Für diese Lösung bestimmen Sie $v(t) = |z(t)|^2$ sowie zwei Schranken $0 < \alpha \le v(t) \le \beta$.

e) Bestimmen Sie eine Fundamentalmatrix $Z(t)$ mit $Z(0) = I$ und deren Wronski-Determinante $w(t) = \det Z(t)$.

Aufgabe 5.2 Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der angegebenen Systeme:

a) $$\left\{ \begin{aligned} x' &= x - y - z \\ y' &= x + 3y + z \\ z' &= -3x + y - z \end{aligned} \right.$$

b) $$\left\{ \begin{aligned} x' &= 8x + 12y - 2z \\ y' &= -3x - 4y + z \\ z' &= -x - 2y + 2z \end{aligned} \right.$$

c) $$\left\{ \begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= u_3 \\ u_3' &= u_4 \\ u_4' &= -u_1 - 2u_3 \end{aligned} \right.$$

Abgabetermin: Freitag, 16. November, vor der Vorlesung.