Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Dipl.-Math. Michael Pokojovy

23. November 2007

Mathematik für Physiker III
7. Übungsblatt

Im folgenden sei $I = [t_0, t_1]$ ein Intervall, $y_0 \in \mathbb{R}$, $f \in C^k(I \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ eine global Lipschitz-stetige Funktion. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0. \tag{1}$$

Aufgabe 7.1 Für die Lösung von (1) seien die folgenden drei Einschrittverfahren gegeben:

i) explizites Eulerverfahren

$$u_{i+1} = u_i + hf(t_i, u_i)$$

ii) explizites Eulerverfahren mit halber Schrittweite

$$v_{i+1/2} = v_i + \frac{h}{2} f(t_i, v_i), \quad v_{i+1} = v_{i+1/2} + \frac{h}{2} f\left(t_i + \frac{h}{2}, v_{i+1/2}\right)$$

iii) modifiziertes Eulerverfahren nach Collatz

$$w_{i+1} = w_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2} f(t_i, w_i)\right)$$

a) Bestimmen Sie die Konsistenzordnung der Verfahren *i*) und *ii*). Welche Beziehung besteht zwischen den jeweils führenden Termen in $O(h^p)$ von *i*) und *ii*)?

b) Zeigen Sie, dass $w_{i+1} = 2v_{i+1} - u_{i+1}$ gilt, falls $u_i = v_i = w_i = \eta$. Was folgt daraus für die Konsistenzordnung des modifizierten Eulerverfahrens *iii*)?

Aufgabe 7.2 Durch

$$w_{j+2} + a_1 w_{j+1} + a_0 w_j = h(b_0 f(t_j, w_j) + b_1 f(t_{j+1}, w_{j+1}))$$

ist ein lineares Zweischrittverfahren für (1) gegeben. Bestimmen Sie die Parameter a_0, a_1, b_0 und b_1 so, dass für $k \geq 2$ das Verfahren mindestens konvergent der Ordnung 2 ist.

Aufgabe 7.3 Es sei $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $M \in \mathbb{N}$, $h = 1/M$ und $u_M(i)$, $i \in \mathbb{N}$ der durch das explizite Eulerverfahren für die Lösung u der Aufgabe

$$\dot{u} = Au, \quad u(0) = \alpha \in \mathbb{R}^N$$

gelieferte Näherungswert an der Stelle $t = i$ mit $h = 1/M$.

A sei über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar. Für alle Eigenwerte λ von A gelte $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$. Wie klein ist h zu wählen, damit $\lim_{i\to\infty} u(i) = \lim_{i\to\infty} u_M(i)$ für jedes $\alpha \in \mathbb{R}^N$?

Hinweis: Zeigen Sie zunächst: $u_M(i) = (I + hA)^{iM}\alpha$.

Abgabetermin: Freitag, 30. November, vor der Vorlesung.