Assemblierung der FEM für das Stokes-Problem im $\mathbb{R}^2$

Bei der Assemblierung der Steifigkeitsmatrix und des Ladevektors für das Stokes-Problem benötigt man folgende Integrale

$$
\begin{aligned}
a_{ij} &= \int_e \nabla v_i \cdot \nabla v_j \,\mathrm{d}(\xi,\eta), \quad 1 \le i,j \le 6,\\
b_{ij} &= \int_e v_i v_j \,\mathrm{d}(\xi,\eta), \quad 1 \le i,j \le 6,\\
c_{ij} &= \int_e \frac{\partial v_i}{\partial \xi} q_j \,\mathrm{d}(\xi,\eta), \quad 1 \le i \le 6, 1 \le j \le 3,\\
d_{ij} &= \int_e \frac{\partial v_i}{\partial \eta} q_j \,\mathrm{d}(\xi,\eta), \quad 1 \le i \le 6, 1 \le j \le 3,\\
e_i &= \int_e q_i \,\mathrm{d}(\xi,\eta), \quad 1 \le i \le 3,
\end{aligned}
$$

wobei die Formfunktionen

$$q_1(\xi,\eta) = \xi, \quad q_2(\xi,\eta) = \eta, \quad q_3(\xi,\eta) = 1-\xi-\eta$$

und

$$
\begin{array}{ll}
v_1(\xi,\eta) = \xi(2\xi-1), & v_2(\xi,\eta) = \eta(2\eta-1),\\
v_3(\xi,\eta) = (1-\xi-\eta)(1-2\xi-2\eta), & v_4(\xi,\eta) = 4\xi(1-\xi-\eta),\\
v_5(\xi,\eta) = 4\eta(1-\xi-\eta), & v_6(\xi,\eta) = 4\xi\eta
\end{array}
$$

auf dem Referenzdreieck e mit den Ecken $p^1 = (1,0)$, $p^2 = (0,1)$, $p^3 = (0,0)$ definiert sind. Es gilt

$$
(a_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix}
1/2 & 0 & 1/6 & -2/3 & 0 & 0\\
0 & 1/2 & 1/6 & 0 & -2/3 & 0\\
1/6 & 1/6 & 1 & -2/3 & -2/3 & 0\\
-2/3 & 0 & -2/3 & 8/3 & 0 & -4/3\\
0 & -2/3 & -2/3 & 0 & 8/3 & -4/3\\
0 & 0 & 0 & -4/3 & -4/3 & 8/3
\end{pmatrix},
$$

$$
(b_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix}
\frac{1}{60} & -\frac{1}{360} & -\frac{1}{360} & 0 & -\frac{1}{90} & 0\\
-\frac{1}{360} & \frac{1}{60} & -\frac{1}{360} & -\frac{1}{90} & 0 & 0\\
-\frac{1}{360} & -\frac{1}{360} & \frac{1}{60} & 0 & 0 & -\frac{1}{90}\\
0 & -\frac{1}{90} & 0 & \frac{4}{45} & \frac{2}{45} & \frac{2}{45}\\
-\frac{1}{90} & 0 & 0 & \frac{2}{45} & \frac{4}{45} & \frac{2}{45}\\
0 & 0 & -\frac{1}{90} & \frac{2}{45} & \frac{2}{45} & \frac{4}{45}
\end{pmatrix},
$$

$$(c_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/6 \\ -1/6 & 0 & 1/6 \\ -1/6 & -1/3 & -1/6 \\ 1/6 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}, \quad (d_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & -1/6 \\ -1/3 & -1/6 & -1/6 \\ 0 & -1/6 & 1/6 \\ 1/3 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix},$$

$$(e_i)_i = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Ein **MAPLE**-Programm zur Berechnung obiger Matrizen für ein allgemeines Dreieck e mit Eckpunkten p^i, p^j und p^k findet man im Netz unter:
`http://www.math.uni-konstanz.de/~pokojovy/pdgl2SS08/asmstokes.mw`