Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
PD Dr. Jürgen Saal
Dipl.-Math. Michael Pokojovy

20. Oktober 2009

Evolutionsgleichungen
(Partielle Differentialgleichungen II)
1. Übungsblatt

Aufgabe 1.1 Seien X, Y Banachräume, $D \subset X$ ein dichter Untervektorraum. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Sind $A, B \in L(X, Y)$ mit $Ax = Bx$ für alle $x \in D$, dann gilt $A = B$ als Gleichheit in $L(X, Y)$.

(b) Ist $B \colon D \to Y$ eine lineare und beschränkte Abbildung (d.h. es existiert ein $C > 0$ mit $\|Bx\|_Y \leq C\|x\|_X$ $(x \in D)$), dann existiert genau eine Fortsetzung $\tilde{B} \in L(X, Y)$ von B. Es gilt $\|\tilde{B}\|_{L(X,Y)} \leq C$.

Aufgabe 1.2 Seien X, Y Banachräume und $(T_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L(X, Y)$ beschränkt (bzgl. Operatornorm). Es gebe eine dichte Teilmenge $D \subset X$ so, dass für alle $x \in D$ die Folge $(T_k x)_{k\in\mathbb{N}} \subset Y$ eine Cauchyfolge ist. Zeigen Sie, dass genau ein $T \in L(X, Y)$ mit $T_k \xrightarrow{s} T$ existiert und dass $\|T\|_{L(X,Y)} \leq \liminf_{k\to\infty} \|T_k\|_{L(X,Y)}$ gilt.

Aufgabe 1.3 Zeigen Sie die Abgeschlossenheit der folgenden Operatoren:

(a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ in $C\big([0,1]\big)$ mit Definitionsbereich $D\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) = C^1\big([0,1]\big)$.

(b) Δ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $D(\Delta) = \big\{u \in L^p(\mathbb{R}^n) : \Delta u \in L^p(\mathbb{R}^n)\big\}$.

Abgabetermin: Dienstag, 27. Oktober 2009 in der Vorlesung.