Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
PD Dr. Jürgen Saal
Dipl.-Math. Michael Pokojovy

27. Oktober 2009

Evolutionsgleichungen
(Partielle Differentialgleichungen II)
2. Übungsblatt

Definition 2.1 Sei X ein Banachraum. $I \subset \mathbb{R}$ sei ein kompaktes Intervall.

a) Eine Funktion $f : I \longrightarrow X$ heißt schwach messbar, wenn für jedes $x' \in X'$ die Funktion

$$I \ni t \longmapsto \langle x', f(t) \rangle_{X',X}$$

Lebesgue-messbar ist.

b) Eine Funktion $f : I \longrightarrow X$ besitzt einen separablen wesentlichen Wertebereich, wenn es eine Nullmenge $N \subset I$ derart gibt, dass $f(I \backslash N)$ separabel ist.

Aufgabe 2.1 Sei X ein Banachraum, $I \subset \mathbb{R}$ kompaktes Intervall.

Eine Funktion $f \colon I \longrightarrow X$ mit separablem wesentlichem Wertebereich ist genau dann messbar, wenn f schwach messbar ist.

Aufgabe 2.2 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Gilt $f \in L^{p'}(I, X')$ und $g \in L^p(I, X)$, dann ist die Funktion

$$t \in I \longmapsto \langle f(t), g(t) \rangle_{X',X}$$

Lebesgue-integrierbar und erfüllt die Höldersche Ungleichung

$$\int_I |\langle f(t), g(t) \rangle_{X',X}| \,\mathrm{d}t \leq \|f\|_{L^{p'}(I,X')} \|g\|_{L^p(I,X)}$$

mit $1 \leq p, p' \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Aufgabe 2.3 Sei X ein Banachraum und $t_0 \in [0, \infty)$. Zeigen Sie:

(a) Für $f \in C([0, \infty), X)$ gilt

$$\lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t f(s) \mathrm{d}s = f(t_0).$$

(b) Ist $f \in C^1([0, \infty), X)$, so gilt für alle $t \geq t_0$:

$$f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^t f'(s) \mathrm{d}s.$$

Abgabetermin: Dienstag, 3. November 2009 in der Vorlesung.