Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
PD Dr. Jürgen Saal
Dipl.-Math. Michael Pokojovy

03. November 2009

Evolutionsgleichungen
(Partielle Differentialgleichungen II)
3. Übungsblatt

Aufgabe 3.1 Sei $T\colon X \longrightarrow Y$ ein linearer, beschränkter Operator zwischen Banachräumen X und Y, und sei $f\colon I \longrightarrow X$ Bochner-integrierbar. Dann ist auch $T \circ f\colon t \longmapsto T(f(t))$ Bochner-integrierbar und es gilt

$$T \int_I f(t)\mathrm{d}t = \int_I T(f(t))\mathrm{d}t.$$

Aufgabe 3.2 Sei X ein Banachraum, I ein kompaktes Intervall. Beweisen Sie für $p \in [1, \infty)$, dass die Einbettung $C(I, X) \hookrightarrow L^p(I, X)$ dicht ist.

Aufgabe 3.3 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, X ein Banachraum.

a) Seien $f_n\colon \Omega \longrightarrow X$ messbar, $f_n(\Omega)$ separabel. Weiter gelte $f_n \longrightarrow f$ μ-fast überall. Sei $g\colon \Omega \longrightarrow [0, \infty]$ messbar mit $\int g\mathrm{d}\mu < \infty$ und $\|f_n(z)\| \le g(z)$ μ-fast überall für alle $n \in \mathbb{N}$, und $\|f(z)\| \le g(z)$ μ-fast überall.
Dann ist $f_n, f \in L^1(\mu, X)$ und es gilt

$$\int f_n\mathrm{d}\mu \longrightarrow \int f\mathrm{d}\mu \text{ in } X \text{ für } n \to \infty.$$

b) Sei $f_n\colon \Omega \longrightarrow X$ messbar, $f_n(\Omega)$ separabel, $\sum_{n=1}^{\infty} \int \|f_n\|\mathrm{d}\mu < \infty$. Dann ist $f_n \in L^1(\mu, X)$ und $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ konvergiert in X für μ-fast alle $z \in \Omega$.
Die Funktion

$$z \mapsto \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z), & \text{falls } \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \text{ konvergiert,} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist integrierbar, und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n\mathrm{d}\mu = \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n\mathrm{d}\mu.$$

Aufgabe 3.4 Eine C_0-Halbgruppe $(T(t))_{t\ge 0}$ mit Generator $A\colon D(A) \longrightarrow X$ erfülle

$$\|T(t) - I\|_{L(X)} \to 0 \text{ für } t \to 0.$$

Zeigen Sie, dass dann $A \in L(X)$ gilt.

Hinweis: Verfahren Sie wie im Beweis zu Satz 2.3.

Abgabetermin: Dienstag, 10. November 2009 in der Vorlesung.