Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
PD Dr. Jürgen Saal
Dipl.-Math. Michael Pokojovy

10. November 2009

Evolutionsgleichungen
(Partielle Differentialgleichungen II)
4. Übungsblatt

Aufgabe 4.1 Wir betrachten den Gaußkern

$$G_t(x) := \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) \text{ für } x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0.$$

Zeigen Sie unter Verwendung der Fouriertransformation, dass

$$T(t)f := G_t * f$$

eine C_0-Halbgruppe auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ mit Generator $A = \Delta$ und $D(A) = H^2(\mathbb{R}^n)$ definiert.

Aufgabe 4.2

a) Sei X ein Banachraum und $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie die Äquivalenz von:
   (i) $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ ist C_0-Halbgruppe auf X mit Generator A und $\omega(T) = \omega_0$.
   (ii) $\big(\exp(-\lambda t)T(t)\big)_{t\geq 0}$ ist C_0-Halbgruppe auf X mit Generator $A - \lambda I$ und $\omega\big(\exp(-\lambda\cdot)T\big) = \omega_0 - \lambda$.

b) Sei A ein dissipativer linearer Operator auf einem Banachraum X mit dem dichten Definitionsbereich $D(A)$. Dann ist A abschliessbar, $\bar{A}$ dissipativ und es gilt:

$$\overline{\mathrm{im}(\lambda - A)} = \mathrm{im}(\lambda - \bar{A}),$$

wobei $\mathrm{im}(B)$ den Wertebereich eines Operators $B : X \to X$ bezeichnet.

Aufgabe 4.3

a) Sei A der infinitesimale Generator einer C_0-Halbgruppe $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ auf einem Banachraum X mit $\|T(t)\| \leq M$ für $t \geq 0$. Beweisen Sie:

$$\|Ax\|^2 \leq 4M^2\|A^2x\| \cdot \|x\| \text{ für } x \in D(A^2) \text{ mit } \|A^2x\| \neq 0.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Tatsache: $T(t)x = x + \int_0^T T(\tau)Ax\,\mathrm{d}\tau$ für $x \in D(A)$.

b) Sei $f \in BUC(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Zeigen Sie:

$$\|f'\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty^{1/2}\|f''\|_\infty^{1/2}.$$

Hinweis: Wählen Sie A als Erzeuger der Translationshalbgruppe $T(t)f = f(t+\cdot)$ auf dem Banachraum $(BUC(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ und wenden Sie auf A die Aufgabe 4.3 a) an.

Abgabetermin: Dienstag, 17. November 2009 in der Vorlesung.