Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
PD Dr. Jürgen Saal
Dipl.-Math. Michael Pokojovy

17. November 2009

Evolutionsgleichungen
(Partielle Differentialgleichungen II)
5. Übungsblatt

Definition 5.1 Sei X ein Banachraum und sei $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, X)$. Die Laplacetransformierte $\hat{f}$ von f ist definiert durch

$$\hat{f}(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t) \mathrm{d}t, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Definition 5.2 Zu einem $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, X)$ definieren wir:

a) die Abszisse $\mathrm{abs}(f)$ der Konvergenz von $\hat{f}$ mittels

$$\mathrm{abs}(f) := \inf\{\operatorname{Re}\lambda \mid \hat{f}(\lambda) \text{ existiert}\}.$$

b) die exponentielle Wachstumsschranke $\omega(f)$ von f vermöge

$$\omega(f) := \inf\left\{\omega \in \mathbb{R} \mid \sup_{t \geq 0} \|e^{-\omega t} f(t)\|_X < \infty\right\}.$$

Aufgabe 5.1 Sei $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, X)$. Beweisen Sie:

a) Das Laplaceintegral $\hat{f}(\lambda)$ konvergiert für $\operatorname{Re}\lambda > \mathrm{abs}(f)$ und divergiert für $\operatorname{Re}\lambda < \mathrm{abs}(f)$.

b) Es gilt $\mathrm{abs}(f) = \mathrm{abs}(\|f\|) \leq \omega(f)$.

c) Sei $f(t) := e^t e^{e^t} \cos(e^{e^t})$. Es gilt $\mathrm{abs}(f) = 0$ und $\omega(f) = \infty$.

Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis für $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, X)$, dass $\mathrm{abs}(f) = \omega(F - F_\infty)$ gilt, wobei $F(t) = \int_0^t f(s)\mathrm{d}s$ und $F_\infty = \begin{cases} \lim_{t\to\infty} F(t), & \lim_{t\to\infty} F(t) \text{ existiert}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Aufgabe 5.2 Zeigen Sie:

a) Es gilt die Einbettung: $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$.

b) Sei $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ ist dann $\lambda(N_{f,g}) = 0$ und $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|f * g\|_\infty = \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Aufgabe 5.3 Seien $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $s > 0$, $a \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Dann gilt:

a) $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi - a)$ für $g(x) = f(x)e^{iax}$,

b) $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{-ia\xi}$ für $g(x) = f(x - a)$,

c) $\hat{g}(\xi) = s^n \hat{f}(s\xi)$ für $g(x) = f(\frac{x}{s})$,

d) $\mathcal{F}f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\partial^\alpha(\mathcal{F}f) = (-i)^{|\alpha|}\mathcal{F}g$, wobei $g(x) := x^\alpha f(x)$.

Abgabetermin: Dienstag, 24. November 2009 in der Vorlesung.