Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
PD Dr. Jürgen Saal
Dipl.-Math. Michael Pokojovy

24. November 2009

Evolutionsgleichungen
(Partielle Differentialgleichungen II)
6. Übungsblatt

Aufgabe 6.1 Sei X ein Banachraum, $A\colon D(A) \subset X \to X$ linear, abgeschlossen und dicht definiert. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Für $\mu \in \rho(A)$ gilt
$$\sigma((\mu - A)^{-1})\backslash\{0\} = \left\{ \tfrac{1}{\mu-\lambda} \;\middle|\; \lambda \in \sigma(A) \right\}.$$

b) Sind A und der zu A adjungierte Operator A' dissipativ, dann erzeugt A eine C_0-Kontraktionshalbgruppe auf X.

Aufgabe 6.2 Sei $(T(t))_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe auf dem Banachraum X. Ferner gebe es ein $t_0 > 0$ mit $T(t_0)\colon X \to X$ bijektiv. Beweisen Sie, dass sich dann T zu einer C_0-Gruppe auf X fortsetzen lässt.

Aufgabe 6.3 Sei X ein Banachraum, $G \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon G \to L(X)$ messbar. Äquivalent sind:

i) $f\colon G \to L(X)$ holomorph.

ii) für jedes $x \in X$ ist $f(\cdot)x\colon G \to X$ holomorph.

iii) für jedes $x \in X$ und $x' \in X'$ ist $\langle f(\cdot)x, x'\rangle_{X,X'}\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph.

Aufgabe 6.4 (Freiwillig) Unter Voraussetzungen des Satzes 3.19 beweisen Sie das Umnormierungslemma: Für $x \in X$ gilt

a) $\|x\| \leq \|x\|_\mu \leq M\|x\|$,

b) $\|\mu(\mu - A)^{-1}x\|_\mu \leq \|x\|_\mu$,

c) $\|\lambda(\lambda - A)^{-1}x\|_\mu \leq \|x\|_\mu$, $0 < \lambda \leq \mu$,

d) $\|\lambda^k(\lambda - A)^{-k}x\| \leq \|x\|_\mu$, $0 < \lambda \leq \mu$,

e) $\|x\|_\lambda \leq \|x\|_\mu$, $0 < \lambda \leq \mu$.

Abgabetermin: Dienstag, 1. Dezember 2009 in der Vorlesung.