Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
PD Dr. Jürgen Saal
Dipl.-Math. Michael Pokojovy

8. Dezember 2009

Evolutionsgleichungen
(Partielle Differentialgleichungen II)
8. Übungsblatt

Aufgabe 8.1 Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Für alle $\varphi \in (0, \pi)$ gibt es ein $C_\varphi > 0$ derart, dass für alle $\lambda \in \Sigma_\varphi$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$|\lambda + |\xi|^2| \geq C_\varphi |\lambda|$$

gilt.

b) Sei $(T(t))_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe auf dem Banachraum X mit Erzeuger $A\colon D(A) \to X$. Zeigen Sie: Gilt $T(t)x \in D(A)$ für alle $x \in X$ und $t > 0$, so ist T stark differenzierbar in $(0, \infty)$.

Aufgabe 8.2 Sei $(T(t))_{t\geq 0}$ eine beschränkte C_0-Halbgruppe auf dem Banachraum X mit Erzeuger $A\colon D(A) \to X$. Zeigen Sie für die Resolventenmenge von A:

$$\{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Re} z > 0\} \subset \rho(A).$$

Aufgabe 8.3 Sei A sektoriell auf dem Banachraum X und $\varphi \in (0, \varphi_A)$. Sei $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash\bar{\Sigma}_\varphi)$ holomorph und besitze in 0 eine hebbare Singularität. Außerdem gelte $f \in \mathcal{H}_{0,\beta}(\mathbb{C}\backslash\bar{\Sigma}_\varphi)$ für ein $\beta \in \mathbb{R}$. Wir definieren $f(A)$ durch

$$\begin{aligned} f(A) &:= \psi(A)^{-k}(\psi^k f)(A), \\ D(f(A)) &:= \{x \in X \,|\, (\psi^k f)(A)x \in D(A^k)\}, \end{aligned}$$

wobei $k \in \mathbb{N}$ mit $k > \beta$ und $\psi(\lambda) := (1 - \lambda)^{-1}$. Weisen Sie für den Operator $f(A)$ die folgenden Eigenschaften nach:

a) Wohldefiniertheit (freiwillig),

b) Abgeschlossenheit,

c) Dichtheit von $D(f(A))$ in X.

Abgabetermin: Dienstag, 15. Dezember 2009 in der Vorlesung.