Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
PD Dr. Jürgen Saal
Dipl.-Math. Michael Pokojovy

15. Dezember 2009

Evolutionsgleichungen
(Partielle Differentialgleichungen II)
9. Übungsblatt

Aufgabe 9.1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Die Matrix

$$a = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n} \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^{n,n})$$

sei symmetrisch und positiv semidefinit, d.h. $a_{ij} = a_{ji}$ und

$$\sum_{i,j=1}^{n} \xi_i a_{ij}(x) \xi_j \geq 0 \text{ für alle } x \in \Omega \text{ und } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Wir betrachten einen elliptischen Operator A_D mit den Dirichletschen Randbedingungen:

$$A_D u := \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}(\cdot)\partial_j u), \quad u \in D(A_D) := \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \,\middle|\, \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}(\cdot)\partial_j u) \in L^2(\Omega) \right\},$$

wobei $H_0^1(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$. Zeigen Sie für alle $v \in H^1(\Omega)$ die Gültigkeit von

$$\langle A_D u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = -\langle a_{ij} \nabla u, \nabla v \rangle_{(L^2(\Omega))^n}.$$

Hinweis: Beachten Sie, dass der Rand $\partial\Omega$ von Ω i.A. den Voraussetzungen des Gaußschen Satzes nicht genügt.

Aufgabe 9.2 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Zeigen Sie unter Verwendung des Theorems von Lumer und Phillips, dass der in Aufgabe 9.1 definierte Operator A_D eine C_0-Kontraktionshalbgruppe auf $L^2(\Omega, \mathbb{R})$ erzeugt.

Abgabetermin: Dienstag, 22. Dezember 2009 in der Vorlesung.