Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
PD Dr. Jürgen Saal
Dipl.-Math. Michael Pokojovy

22. Dezember 2009

Evolutionsgleichungen
(Partielle Differentialgleichungen II)
10. Übungsblatt

Aufgabe 10.1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Der Neumann-Schrödingeroperator A_N in $L^2(\Omega)$ ist definiert durch

$$\begin{aligned} A_N u &:= i\Delta u, \\ u \in D(A_N) &:= \{u \in H^1(\Omega) \,|\, i\Delta u \in L^2(\Omega), \quad \langle i\Delta u, v\rangle = -i\langle \nabla u, \nabla v\rangle \quad \forall v \in H^1(\Omega)\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass A_N eine C_0-Kontraktionshalbgruppe auf $L^2(\Omega)$ erzeugt.

Aufgabe 10.2 Es sei $1 < p < \infty$. Beweisen Sie, dass der zum Operator A in L^p mit

$$Au = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u, \quad u \in D(A) := W^{1,p}(\mathbb{R})$$

adjungierte Operator A' durch $A' = -A$ in $L^{p'}$ gegeben ist, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ und $D(A') = W^{1,p'}$.

Aufgabe 10.3 Sei $A\colon D(A) \to X$ Generator einer C_0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ auf X. Wir betrachten die durch

$$T'(t) := (T(t))', \quad t \geq 0$$

definierte Familie $(T'(t))_{t\geq 0}$. Zeigen Sie:

a) $T'(0) = I$ und $T'(t+s) = T'(t)T'(s)$ für alle $t, s \geq 0$.

b) Ist T' eine C_0-Halbgruppe, dann wird sie von A' erzeugt.

c) Ist A' dicht definiert, dann ist $T'|_{X^\odot}$ stark stetig, wobei

$$X^\odot = \{x' \in X' \mid \lim_{t\downarrow 0} \|T'(t)x' - x'\| = 0\}.$$

Abgabetermin: Dienstag, 12. Januar 2010 in der Vorlesung.