Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
PD Dr. Jürgen Saal
Dipl.-Math. Michael Pokojovy

12. Januar 2010

Evolutionsgleichungen
(Partielle Differentialgleichungen II)
11. Übungsblatt

Aufgabe 11.1 Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet. Wir betrachten die dreidimensionalen thermoelastischen Gleichungen

$$\begin{aligned} u_{tt} - \mu\Delta u - (\mu+\lambda)\nabla \operatorname{div} u + \gamma\nabla\theta &= 0 \\ \theta_t - \kappa\Delta\theta + \gamma \operatorname{div} u_t &= 0 \end{aligned} \quad \text{für } (t,x) \in (0,\infty)\times\Omega$$

mit den Dirichletschen Randbedingungen

$$u = 0 \text{ und } \theta = 0 \text{ für } (t,x) \in (0,\infty)\times\partial\Omega$$

und den Anfangsdaten

$$u(0,\cdot) = u_0, \quad u_t(0,\cdot) = u_1, \quad \theta(0,\cdot) = \theta_0,$$

wobei $\mu, \lambda, \kappa, \gamma > 0$ gilt.

a) Transformieren Sie dies auf ein System erster Ordnung in t der Form

$$V_t + AV = 0, \quad V(0) = V_0,$$

wobei $V = (u, u_t, \theta) \in \mathcal{H} = (H_0^1(\Omega))^3 \times (L^2(\Omega))^3 \times L^2(\Omega)$ mit

$$\|V\|_{\mathcal{H}}^2 = \mu\sum_{i=1}^{3} \|\nabla u_i\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 + (\mu+\lambda)\|\operatorname{div} u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_t\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 + \|\theta\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Wie sehen A, $D(A)$ und V_0 aus?

Hinweis: Setzen Sie $D(A) = \{V \in \mathcal{H} \mid AV \in \mathcal{H}, V_3 \in H_0^1(\Omega)\}$.

b) Bestimmen Sie den zu A adjungierten Operator A'.

c) Zeigen Sie, dass $-A$ der Erzeuger einer Kontraktionshalbgruppe auf $\mathcal{H}$ ist.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis folgende Version des Satzes von Lumer und Phillips verwenden: Sei A abgeschlossen, A, A' dissipativ, dann erzeugt A eine Kontraktionshalbgruppe.

Aufgabe 11.2 Beweisen Sie, dass folgende Symbole einer Mikhlin-Bedingung genügen:

a) $\xi \mapsto m(\xi)$, wobei $m \in C^k(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$, $k > n/2$, homogen vom Grad 0 ist,

b) $\xi \mapsto \frac{i\xi_j\xi_k}{\lambda+|\xi|^2}$,

c) $\xi \mapsto \frac{\lambda}{\lambda+|\xi|^2}$.

Was können Sie damit für den Laplaceoperator auf $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, schließen?

Abgabetermin: Dienstag, 19. Januar 2010 in der Vorlesung.