Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
PD Dr. Jürgen Saal
Dipl.-Math. Michael Pokojovy

19. Januar 2010

Evolutionsgleichungen
(Partielle Differentialgleichungen II)
12. Übungsblatt

Aufgabe 12.1 Als Legierung bezeichnet man in der Metallkunde ein Gemisch mehrerer Atomsorten mit gemeinsam metallischem Charakter. Die aus der mathematischen Physik stammende Cahn-Hilliard Gleichung beschreibt den Vorgang der Entmischung einer Legierung von zwei Metallsorten. Dieser Prozess besteht darin, dass sich zwei Bestandteile einer binären Flüssigkeit spontan voneinander trennen und separate homogene Bereiche bilden. Die linearisierte Cahn-Hilliard Gleichung in $\mathbb{R}^n$ lautet

$$u_t + \gamma c \Delta^2 u + c\Delta u = 0 \text{ in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n,$$
$$u(t=0) = u_0 \text{ in } \mathbb{R}^n,$$

worin unbekannte skalare Funktion u Konzentration von beiden Stoffen dadurch beschreibt, dass ihre negativen Werte für die Konzentration erster Metallsorte und positiven für die zweiter Metallsorte stehen. Positive Konstanten c und γ bezeichnen den Diffusionskoeffizienten bzw. die Länge des Übergangsbereiches.

Beweisen Sie für alle $1 < p < \infty$, dass der Cahn-Hilliard-Operator

$$\gamma c \Delta^2 + c\Delta$$

eine holomorphe C_0-Halbgruppe auf $L^p(\mathbb{R}^3)$ vom Winkel $\frac{\pi}{2}$ erzeugt.

Hinweis: Gehen Sie wie folgt vor:

- Wenden Sie die Laplace-Fourier-Transformation auf $u_t + \gamma c\Delta^2 u$ an.
- Rechnen Sie die Mikhlin-Bedingung für das Symbol nach.
- Fassen Sie $c\Delta u$ als kompakte Störung auf.

Aufgabe 12.2 Seien X, Y Banachräume. Zeigen Sie die Permanenzeigenschaften eines sektoriellen Operators $A \in \mathscr{S}(X)$:

a) $A \in \mathscr{S}(X) \Rightarrow rA \in \mathscr{S}(X)$ für $r > 0$ und $\varphi_{rA} = \varphi_A$,
b) $A \in \mathscr{S}(X) \Rightarrow e^{\pm i\psi}A \in \mathscr{S}(X)$ für $\psi \in [0, \pi - \varphi_A)$ und $\varphi_{e^{\pm i\psi}A} \le \varphi_A + \psi$,
c) Ist $\overline{D(A')} = X'$, $\overline{\operatorname{im} A'} = X'$ dann gilt $A \in \mathscr{S}(X) \Leftrightarrow A' \in \mathscr{S}(X')$ und $\varphi_A = \varphi_{A'}$,
d) Ist $T \in L(X,Y)$ bijektiv, dann gilt $A \in \mathscr{S}(X) \Leftrightarrow TAT^{-1} \in \mathscr{S}(Y)$ und $\varphi_A = \varphi_{TAT^{-1}}$.

Abgabetermin: Dienstag, 26. Januar 2010 in der Vorlesung.