Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
PD Dr. Jürgen Saal
Dipl.-Math. Michael Pokojovy

26. Januar 2010

Evolutionsgleichungen
(Partielle Differentialgleichungen II)
13. Übungsblatt

Aufgabe 13.1 Sei $Y \hookrightarrow X$ ein abgeschlossener Untervektorraum eines Banachraums X. Zu einem linearen Operator $A\colon X \to X$ definieren wir sein Teil B in X auf Y durch $B\colon D(B) \subset X \to Y$, $u \mapsto Au$, wobei $D(B) = \{u \in D(A) \,|\, Au \in Y\}$. Zeigen Sie, dass dann für alle $\lambda \in \rho(A)$

$$(\lambda - B)^{-1} = (\lambda - A)^{-1}|_Y$$

gilt.

Aufgabe 13.2 Seien X, Y, Z Banachräume. Zeigen Sie:

a) Gilt $\mathcal{T}, \mathcal{S} \subset \mathscr{L}(X,Y)$, so ist $\mathcal{T} + \mathcal{S} = \{T + S \,|\, T \in \mathcal{T}, S \in \mathcal{S}\}$ $\mathcal{R}$-beschränkt mit

$$\mathcal{R}(\mathcal{T} + \mathcal{S}) \leq \mathcal{R}(\mathcal{T}) + \mathcal{R}(\mathcal{S}).$$

b) Gilt $\mathcal{T} \subset \mathscr{L}(X,Y)$ sowie $\mathcal{S} \subset \mathscr{L}(Y,Z)$, dann ist $\mathcal{T}\mathcal{S} = \{TS \,|\, T \in \mathcal{T}, S \in \mathcal{S}\}$ $\mathcal{R}$-beschränkt mit

$$\mathcal{R}(\mathcal{T}\mathcal{S}) \leq \mathcal{R}(\mathcal{T})\mathcal{R}(\mathcal{S}).$$

c) Gilt $\mathcal{T} \subset \mathscr{L}(X,Y)$, so ist der Abschluss $\overline{\mathcal{T}}^s$ von $\mathcal{T}$ bzgl. der starken Operatortopologie $\mathcal{R}$-beschränkt mit

$$\mathcal{R}(\overline{\mathcal{T}}^s) \leq \mathcal{R}(\mathcal{T}).$$

Aufgabe 13.3 Seien X, Y Banachräume. Für messbare Funktionen $f\colon \mathbb{R}^n \to L(X,Y)$, $g\colon \mathbb{R}^n \to X$ definieren wir die Menge

$$N_{f,g} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \int_{\mathbb{R}^n} \|f(y)\|_{L(X,Y)} \|g(x-y)\|_X \mathrm{d}y = \infty \right\}$$

und das Faltungsprodukt $f * g\colon \mathbb{R}^n \to Y$ durch

$$(f * g)(x) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) \mathrm{d}y, & x \notin N_{f,g}, \\ 0, & x \in N_{f,g}. \end{cases}$$

Beweisen Sie:

a) Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n, X)$, so gilt $\|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n,X)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n,X)}$,

b) Sind $f \in L^1(\mathbb{R}^n, L(X,Y))$ und $g \in L^1(\mathbb{R}^n, X)$, so gilt $\lambda(N_{f,g}) = 0$, $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n, Y)$ und

$$\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R}^n,Y)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n,L(X,Y))} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n,Y)}.$$

Abgabetermin: Dienstag, 2. Februar 2010 in der Vorlesung.