Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Johannes Schropp
Dipl.-Math. Michael Pokojovy

25. Januar 2008

Aufgaben zum MATLAB-Tutorium

In den nachstehenden Aufgaben sind die elliptischen Randwertprobleme auf den angebenen Gebieten mit der **MATLAB**-Toolbox zu lösen.

Benutzen Sie dabei die Funktion **pdetool** aus **MATLAB** und führen Sie die Schritte **Draw, Boundary, PDE, Mesh** und **Solve** durch. Zeichnen Sie dann die Lösung inklusive Gitter und geben Sie diese aus.

Im Folgenden bezeichnen wir mit $K_\varepsilon((x,y))$ bzw. $\bar{K}_\varepsilon((x,y))$ den offenen bzw. abgeschlossenen Kreis um den Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit dem Radius $\varepsilon > 0$.

Aufgabe 1 Vorgelegt sei die Aufgabe

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1 + 5\cos(x)e^y \text{ in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= 1 - x^2 - 2y^2. \end{aligned}$$

Lösen Sie die Aufgabe mit der Finite Elemente Methode auf dem Gebiet

$$\Omega = ((0,2) \times (0,3)) \setminus ([1,2] \times [1,2]).$$

Aufgabe 2 Finden Sie die Lösung der Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -(u_{xx} + u_{xy} + u_{yy}) - u &= \cos(x^2 + y^2) \text{ in } \Omega, \\ u|_{\Gamma_1} &= 1, \\ u|_{\Gamma_2} &= \sqrt{x^2 + y^2}, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} \Omega &= K_2((0,0)) \setminus [-1,1]^2, \\ \partial\Omega &= \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \quad \Gamma_1 = \partial K_2((0,0)), \quad \Gamma_2 = \partial[-1,1]^2. \end{aligned}$$

Aufgabe 3 Lösen Sie die Poisson-Gleichung mit den Neumannschen Randbedingungen

$$\begin{aligned} -\Delta u - e^{xy}u &= 5\sin(x)\cos(y) \text{ in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} &= x + y \end{aligned}$$

auf dem Gebiet

$$\Omega = \left\{ \left(\frac{3r}{2} \cos\varphi, r\sin\varphi \right) \,\middle|\, r \in (0,1), \quad \varphi \in \left(\frac{\pi}{3}, 2\pi \right) \right\}.$$

Aufgabe 4 Gesucht ist die Lösung folgender elliptischer Differentialgleichung

$$-(2u_{xx} + 5u_{yy}) = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$$

auf dem Gebiet Ω mit

$$\begin{aligned} \Omega =& (((-3,3) \times (-2,2)) \cup K_2((-3,0)) \cup K_2((3,0)))\setminus \\ & \left\{ \left(2r\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right), r\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) \right) \,\middle|\, r \in [0,1], \quad \varphi \in [0, 2\pi) \right\} \end{aligned}$$

versehen mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} n \cdot \begin{pmatrix} 2u_x \\ 5u_y \end{pmatrix} + u &= 0 \text{ in } \Gamma, \\ u &= 1 \text{ in } \partial\Omega\setminus\Gamma, \end{aligned}$$

wobei

$$\Gamma = \left\{ \left(2\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right), \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) \right) \,\middle|\, \varphi \in [0, 2\pi) \right\}.$$

Aufgabe 5 Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -(x+4)^3(\cos y + 2)\Delta u + 3(x+4)^2(\cos y + 2)u_x & \\ -(x+4)^3 \sin y u_y + e^{x+y} u &= 1 \text{ in } \Omega, \\ \left((x+4)^3(\cos y + 2)\frac{\partial u}{\partial n} + 2u \right)\Bigg|_{\partial\Omega} &= x + 2 \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

mit

$$\Omega = (-2,2)^2 \cup K_2((-2,0)) \cup \{(x,y) \,|\, x \in [2,4),\ y \in (x-4, 4-x)\}.$$

Berechnen Sie die Lösung mithilfe der Finiten Elemente.

Aufgabe 6 Es ist die Lösung folgender Randwertaufgabe zu finden:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (c\nabla u) &= 1 \text{ in } \Omega, \\ n \cdot (c\nabla u)|_\Gamma &= 0, \\ u|_{\partial\Omega\setminus\Gamma} &= 1, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} c &= \begin{pmatrix} 2(1+x^2) & \cos y \\ \cos x & 2(1+y^2) \end{pmatrix}, \\ \Omega &= \left(\left\{ \left(5r\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right), 2r\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \right) \,\middle|\, r \in [0,1),\ \varphi \in [0,2\pi) \right\} \right. \\ &\cup \left. \left\{ \left(5r\cos\left(\varphi - \frac{3\pi}{4}\right), 2r\sin\left(\varphi - \frac{3\pi}{4}\right) \right) \,\middle|\, r \in [0,1),\ \varphi \in [0,2\pi) \right\} \right) \setminus \bar{K}_1((0,0)), \\ \Gamma &= \partial K_1((0,0)). \end{aligned}$$

Hinweis: Bringen Sie den Operator L jeweils auf die Form

$$-\nabla \cdot (c(x,y)\nabla u(x,y)) + a(x,y)u(x,y) = f(x,y)$$

mit geeigneten $c \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ und $a, f \in C(\Omega, \mathbb{R})$.
Die Randbedingungen müssen entsprechend auf die Form

$$hu = r$$

bzw.

$$n \cdot (c\nabla u) + qu = g$$

für geieignete $h, r, q, g \in C(\partial\Omega, \mathbb{R})$ gebracht werden.