Eine **Option** ist ein Recht, einen Basiswert (z.B. eine Aktie oder eine Fremdwährung) zum am jetzigen Zeitpunkt festgelegten Ausübungspreis (**Strike price**) an einem zukünftigen Zeitpunkt $T > 0$ zu kaufen (**Call-Option**) oder zu verkaufen (**Put-Option**).

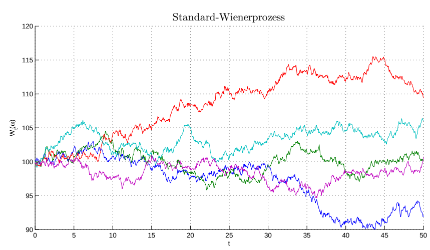
Beispiel: Ein inländisches Unternehmen beziehe Rohstoffe aus den USA und müsse den Rechnungsbetrag in USD begleichen. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass dies stets 30 Tage nach Rechnungseingang geschieht[1] Sollte das Unternehmen am Zahlungsdatum nicht über einen ausreichenden Vorrat an US Dollars verfügen, können diese natürlich stets zum aktuellen Wechselkurs gekauft werden. Um das Risiko zu minimieren, dass sich der Euro/USD-Kurs ungünstig für das Unternehmen entwickelt, kann das Unternehmen an einer Börse (z.B. bei der Deutschen Börse in Frankfurt am Main) eine Call Option zum Strikepreis K kaufen, was dem Unternehmen garantieren würde, dass die Kosten für einen Dollar am Zahlungstag den Wert K nicht übersteigt. Für den Fall, dass der tatsächliche Preis sogar unterhalb von K liegt, ist es fürs Unternehmen sogar vom Vorteil, die Call Option verstreichen zu lassen. Solche Strategien werden **Hedgegeschäft** genannt. Diese stellen ein Finanzinstrument dar, die möglichen Verluste einzugrenzen, müssen aber mit einer **Optionsprämie** bezahlt werden.

Es stellt sich die Frage nach der Optionsbewertung, die sowohl für den Käufer (z.B. ein Unternehmen) als auch den Verkäufer (z.B. die Börse) vom Interesse sind. Die ersten systematischen Studien gehen dabei auf H. Markowitz [5] (später: Capital Asset Pricing Model - CAPM), R. C. Merton [6] sowie F. Black and M. S. Scholes [1] zurück. So haben Black and Scholes in ihrer Originalveröffentlichung [1] aus dem Jahre 1973 eine Bewertungsformel für eine Call-Option (**Option pricing**) vorgeschlagen, die aussschließlich auf erfassbaren Parametern beruht hatte. Die 70er waren also die Zeit, in der sich die Positionen der ,,Quants" (**Quantitative analysts**) in der Finanzwelt besonders verstärkt haben, was einen vorübergehenden Sieg der **Technischen Analyse** über die **Fundamentalanalyse** (deren Anhänger z.B. W. Buffet und G. Soros sind) bedeutet hatte. Im Jahre 1994[2] gründeten R. C. Merton, M. S. Scholes und J. Meriwether (ehemaliger Abteilungsleiter bei Salomon Brothers) eine Kapitalverwaltungsfirma LTCM (Long Term Capital Management), die im April 1998 Kapitalanlagen im Gesamtwert von 134 Milliarden USD verwaltete. Später wurden R. C. Merton und M. S. Scholes 1997 für ihre Arbeit mit dem Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften ausgezeichnet. Fünf Monate danach hat LTCM infolge der Finanzkrise den Großteil ihrer Anlagen sowie des Eigenkapitals verloren. Aus Angst eines mögliches Zusammenbruchs von LTCM hat sogar die New Yorker Fed (Federal Reserve System) eine 3,625 Milliarden schwere Finanzhilfe durch 14 Wall-Street-Banken vermitteln müssen.

Nachstehend wird das Optionsbewertungsmodell nach Black & Scholes vorgestellt. Wir betrachten ein Finanzmarktmodell ohne Steuern, Dividendenzahlungen, Transaktionskosten oder Zuzahlungen für höhere Long- und Short-Positionen. Zu einem Wahrscheinlichkeitsraum mit Filtration $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]})$ werden zwei stochastische Prozesse mit stetigen Pfaden $(S_t)_{t\in[0,T]}$ und $(B_t)_{t\in[0,T]}$ für einen risikobehafteten Vermögenswert (**risky asset**) und ein verzinsliches Wertpapier (**Bond**) betrachtet, die an die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ adaptiert sein sollen. Diese genügen folgendem System stochastischer Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S_t &= \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t \text{ für alle } t \in [0,T], \\ \mathrm{d}B_t &= r B_t \mathrm{d}t \text{ für alle } t \in [0,T], \\ W_0 &= W^0, \\ S_0 &= S^0, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei $(W_t)_{t\in[0,T]}$ den (Standard)Wiener-Prozess bezeichnet und $W^0, S^0 > 0$ vorgegebene feste Zahlen (oder sogar $\mathcal{F}_0$-messbare Zufallsvariablen) sind. Die positiven Zahlen μ und σ bezeichnen dabei den Marktdrift oder den Zinssatz und die Volatilität (Unsicherheitsmaß als Markteigenschaft). Nachstehend werden fünf stetige Pfade eines Standard-Wienerprozesses (auch mathematische Brownsche Bewegung genannant) zum Anfangswert $W_0 = 100$ abgebildet.



[1]Realistischer wäre aber anzunehmen, dass die Zahlung innerhalb dieses Zeitrahmens und nicht stets am letzten Tag erfolgen muss.

[2]F. Black war damals schon an Krebs erkrankt und kam deshalb nicht als Partner in Frage.

Unter Verwendung des Itō-Kalküls (stochastische ,,Kettenregel") lässt sich zeigen, dass der Zufallsprozess $(S_t, B_t)_{t\in[0,T]}$ mit

$$\begin{aligned} S_t &= S^0 e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t} \text{ für } t \in [0,T], \\ B_t &= B^0 e^{rt} \text{ für } t \in [0,T] \end{aligned}$$

die Lösung von (1) darstellt.

Im Black & Scholes Modell betrachten wir nun eine europäische Call-Option auf das **risky asset**. Da der Käufer nicht in der Pflicht steht, wird er die Option nur nutzen, wenn der Kurs bei Fälligkeit über dem Strikepreis liegt, also wenn $S_T > K$ ist. In diesem Fall bringt die Option eine Auszahlung in Höhe von $S_T - K$, denn der Besitzer der Option bezahlt den Strikepreis K und erhält die Aktie mit aktuellem Wert S_T. Im anderen Fall wird die Option verfallen und keine Auszahlung generieren. Wir erhalten somit den $\mathcal{F}_T$-messbaren **Claim**

$$(S(T) - K)^+ = \max\{S(T) - K, 0\}$$

bzw. den **Optionswert**

$$V(T,S) := (S-K)^+$$

für den europäischen Call mit Strikepreis K und Fälligkeit T. Das Ziel ist es nun, den Optionspreis als folgenden Erwartungswert

$$e^{-rT}\mathbb{E}[V(T,S_T)] \qquad \text{(,,Abzinsung"} \times \text{,,Auszahlung")}$$

zu berechnen, wobei $\mathbb{E}$ bzgl. des äquivalenten Martingalmaßes aus dem Satz von Girsanov gebildet wird.

Unter der Annahme, dass $e^{-rt}V(t,S_t)$ eine Dichte besitzt, lässt sich dann eine parabolische partielle Differentialgleichung für den Optionswert V herleiten (vgl. auch Fokker & Planck Gleichung für Markow-Prozesse)

$$\begin{aligned} \partial_t V + \tfrac{\sigma^2 s^2}{2}\partial_s^2 V + rs\partial_s V - rV &= 0 \text{ in } (0,T)\times(0,\infty), \\ V(T,s) &= \max\{s-K,0\} \text{ in } (0,\infty), \\ V(t,0) &= 0 \text{ in } (0,T), \\ \lim_{s\to\infty} \tfrac{V(t,s)}{s} &= 1 \text{ in } (0,T). \end{aligned} \tag{2}$$

Es ist zu beachten, dass Gleichung (2) kein Anfangsrandwertproblem sondern ein Endrandwertproblem darstellt.

Es lässt sich beweisen (s. [1, 2]), dass die Funktion

$$V(t,s) = sN(d_1(t,s)) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2(t,s))$$

mit

$$d_{1,2}(t,s) := \frac{\ln(\frac{s}{E}) + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T}-t}, \quad N(d) := 1 - \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-d} e^{-\frac{\rho^2}{2}}\,\mathrm{d}\rho$$

die Gleichung (2) löst.

Fazit: Finanzielle Modelle basieren oft auf zahlreichen vereinfachenden Annahmen, die in der Realität nicht gegeben sind. Selbst der rationale ,,homo oeconomicus" von J. S. Mill ist leider ein idealisiertes Modell, da laut J. M. Keynes der Markt in einer Krise ,,länger irrational bleiben, als man solvent bleiben kann".

Literatur

[1] Black, F., Scholes, M. S. The pricing of options and corporate liabilities, The Journal of Political Economy, Vol. 81, No. 3, pp. 637–654 (1973)

[2] Denk, R., Racke, R. Kompendium der Analysis, Bd. 2, pp. 256–259 (2012)

[3] Ferguson, N. Aufstieg des Geldes: Die Währung der Geschichte, Econ, 2. Aufl., pp. 283–294 (2009)

[4] Hull, J. C. Options, Futures and Other Derivatives (7 ed.). Prentice Hall. (2008)

[5] Markowitz, H. M. Portfolio Selection. The Journal of Finance 7(1), pp. 77–91 (1953)

[6] Merton, R. C. Theory of Rational Option Pricing. Bell Journal of Economics and Management Science (The RAND Corporation) 4(1), pp. 141—183 (1973)

[7] Upgang, S. Bewertung von Derivaten im Black-Scholes Modell, Bachelorarbeit an der WWU Münster (2012)