11. November 2013

Michael Pokojovy

Lineare Wärmeleitung

Wir betrachten einen homogenen, isotropen wärmeleitenden Körper und fassen diesen als Kontinuum auf, indem wir einen jeden Punkt innerhalb des Körpers mit einem dreidimensionalen Vektor $x = (x_1, x_2, x_3)$ aus einem glatt berandeten Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ assoziieren.
Wir führen nun folgende Bezeichnungen ein:

$u(t, x)$: Temperatur des Körpers im Punkt $x \in G$ zum Zeitpunkt $t \geq 0$ $[K]$,

$q(t, x)$: Wärmefluss im Körper an der Stelle $x \in G$ zum Zeitpunkt $t \geq 0$ $[W]$.

$c(x)$: Wärmekapazität des Körpers im Punkt $x \in G$ $[\frac{kJ}{K \cdot kg}]$ (wieviel Wärme eine Masseneinheit pro einen Grad Temperaturänderung benötigt),

$k(x)$: Wärmeleitfähigkeit des Körpers im Punkt $x \in G$ $[\frac{W}{m \cdot K}]$ (Wärmestrom pro Längeeinheit bei einer Temperaturdifferenz),

$\rho(t, x)$: Dichte des Körpers im Punkt $x \in G$ zum Zeitpunkt $t \geq 0$ $[\frac{kg}{m^3}]$,

τ: Relaxationsparameter $[s]$,

$f(t, x)$: Intensivität der Wärmequellen im Punkt $x \in G$ zum Zeitpunkt $t \geq 0$ $[\frac{J}{s}]$.

Die Funktionen c, k, ρ und f seien dabei vorgegeben und erfüllen die Bedingungen:

$$c(x) \geq c_0 > 0,\ k(x) \geq k_0 > 0,\ \rho(t, x) \geq \rho_0 > 0$$

für alle $x \in G$ und $t \geq 0$.
Um die unbekannten Temperatur u und den Wärmefluss q bestimmen zu können, stellen wir die Wärmeleitungsgleichung auf, indem wir das Energieerhaltungsgesetzt auf die Wärmeenergie des Körpers anwenden. Dazu untersuchen wir ein infinitesimal kleines Volumenelement $\mathrm{d}G$ und berechnen die von ihm gespeicherte Wärme:

$$\rho(x)\mathrm{d}G \cdot c(x) \cdot u(t, x),$$

woraus sich nach Integration die Wärme des ganzen Körpers ergibt:

$$Q_1(t) = \int_G \rho(x) c(x) u(t, x) \mathrm{d}G.$$

Ändert sich die Temperatur des Körpers, so kann man die Änderung zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 gemäß

$$\Delta Q_1(t_1, t_2) = Q_1(t_2) - Q_1(t_1) = \int_G \rho(x) c(x) (u(t_2, x) - u(t_1, x)) \mathrm{d}G$$

berechnen.
Zur Änderung der Temperatur tragen nur zwei Faktoren bei:

1. Wärmefluss durch die Oberfläche S von G,
2. Wärmung und Kühlung im Inneren des Körpers durch die Wärmequellen.

Sei $\mathrm{d}S$ ein Flächenelement. Die durch $\mathrm{d}S$ zwischen den Zeiten t_1 und t_2 transportierte Wärme $\mathrm{d}Q$ berechnet sich als

$$\mathrm{d}Q = q(t, x) \cdot n(x) \mathrm{d}S,$$

woraus sich die gesamte Wärmemenge durch die ganze Oberfläche ergibt:

$$Q_2(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \int_S q(t, x) \mathrm{d}S \mathrm{d}t.$$

Die aus den Wärmequellen zwischen den Zeiten t_1 und t_2 entstandene Energie schreibt sich zu

$$Q_3(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \int_G f(t, x) \mathrm{d}G \mathrm{d}t.$$

Das Wärmeerhaltungsgesetzt besagt nun

$$\Delta Q_1(t_1, t_2) = Q_2(t_1, t_2) + Q_3(t_1, t_2),$$

dessen Integralform

$$\int_G \rho(x)c(x)(u(t_2,x)-u(t_1,x))\mathrm{d}G = \int_{t_1}^{t_2}\int_S q(t,x)\cdot n(x)\mathrm{d}S\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2}\int_G f(t,x)\mathrm{d}G\mathrm{d}t$$

lautet.
Unter Verwendung des Gaußschen Satzes ergibt sich

$$\int_G \rho(x)c(x)(u(t_2,x)-u(t_1,x))\mathrm{d}G = \int_{t_1}^{t_2}\int_G \mathrm{div} q(t,x)\mathrm{d}G\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2}\int_G f(t,x)\mathrm{d}G\mathrm{d}t.$$

Unter der Annahme, dass die in der obigen Gleichung auftretenden Funktionen hinreichend glatt sind, bekommt man weiter im Grenzübergang $t_2, t_1 \to t$:

$$\int_G \rho(x)c(x)\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}G = \int_G \mathrm{div} q(t,x)\mathrm{d}G + \int_G f(t,x)\mathrm{d}G$$

und damit

$$\rho(x)c(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{div} q(t,x) + f(t,x). \tag{1}$$

Um die Gleichung (1) zu schließen, müssen wir einen Zusammenhang zwischen der Temperatur u und dem Wärmefluss q – die sogenannte Stoffgleichung – postulieren. Üblicherweise wird eines der beiden Gesetze verwendet:

1. Fouriersches Gesetz der Wärmeleitung:

$$q(t,x) = -k(x)\nabla u(t,x). \tag{2}$$

2. Maxwell-Cattaneo-Vernotte-Gesetz der relativistischen Wärmeleitung (RHC[1]):

$$\tau\frac{\partial q(t,x)}{\partial t} + q(t,x) = -k(x)\nabla u(t,x). \tag{3}$$

Setzt man (2) in (1) ein, so ergibt sich die klassiche parabolische Wärmeleitungsgleichung

$$\rho(x)c(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{div}\big(k(x)\nabla u(t,x)\big) + f(t,x), \tag{4}$$

während (3) und (1) zum hyperbolischen Cattaneo-System führen:

$$\begin{aligned} \rho(x)c(x)\frac{\partial u}{\partial t} &= \mathrm{div} q(x), \\ \tau\frac{\partial q(t,x)}{\partial t} + q(t,x) &= -k(x)\nabla u(t,x). \end{aligned} \tag{5}$$

Um den Wärmeleitungsvorgang eindeutig beschreiben zu können, muss man die Temperaturverteilung im Körper

$$u(0,x) = u_0(x),\ x \in G$$

für (4) bzw. die Temperaturverteilung und den Wärmefluss

$$u(0,x) = u_0(x), \quad q(0,x) = q_0(x),\ x \in G$$

für (5) zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ sowie die Temperaturbilanz am Rand für alle Zeiten $t > 0$ vorschreiben. Letzteres kann wie folgt gemacht werden.

1. Dirichletsche Randbedingung:

$$u(t,x)|_S = v_1(t,x).$$

Diese bedeutet, dass die Temperatur am Rand gleich (vorgegebenem) v_1 gehalten wird.

2. Neumannsche Randbedingung:

$$q(t,x)\cdot n(x)|_S = q_1(t,x),$$

welche heißt, dass der Wärmefluss in die Normalrichtung gleich (vorgegebenem) q_1 ist.

3. Newtonsche (Robinsche) Randbedingung:

$$q(t,x)\cdot n(x)|_S = \alpha(v(t,x)-u(t,x))|_S,$$

welche dem konvektiven Wärmeaustausch des Körpers mit dessen Umgebung entspricht, wobei v die (vorgegebene) äußere Temperatur und α der (bekannte) Konvektionskoeffizient ist.

Die Gleichung (4) lässt sich vereinfachen, indem man c, k und ρ konstant voraussetzt. Dies führt zu

$$\rho c\frac{\partial u}{\partial t} = k\Delta u + f(t,x).$$

[1] relativistic heat conduction