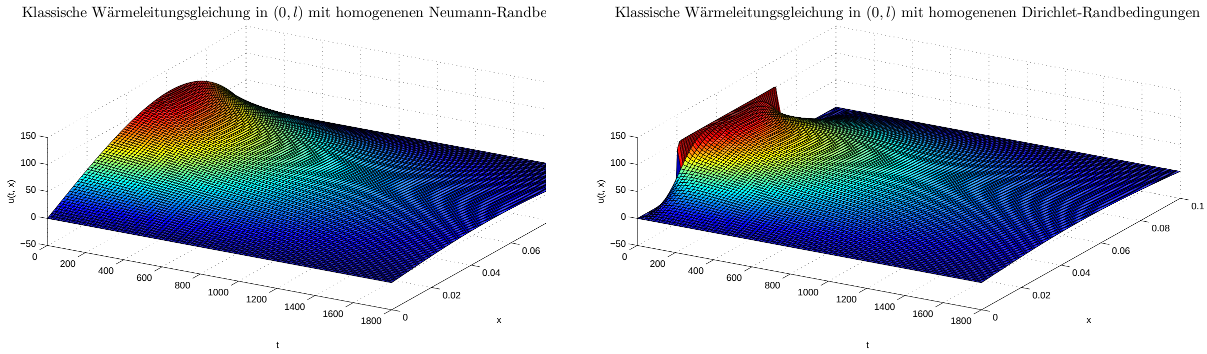
Beispiel 1 (Klassische Wärmeleitungsgleichung): Wir betrachten einen Metallstab der Länge $L = 0,1$ m aus unlegiertem Stahl[1], dessen Oberfläche bis auf den linken und rechten Rand thermisch isoliert ist. Mit θ bezeichnen wir die Temperatur (in °C) im Stab. Zunächst betrachten wir die Situation, dass der Stab am Rande bei konstanter Temperatur $\theta(t, \cdot) = 0$ gehalten wird. Die Funktion θ erfüllt dabei die folgende Anfangsrandwertaufgabe

$$
\begin{aligned}
c\rho\theta_t - \kappa\theta_{xx} &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times (0, l), \\
\theta(t, 0) = \theta(t, L) &= 0 \text{ in } (0, \infty), \\
\theta(0, \cdot) &= \theta^0 \text{ in } (0, l).
\end{aligned}
$$

Anbei werden die Lösungen (s. Lösungstheorie z.B. in [1, Section 1]) zu folgenden zwei Anfangstemperaturprofilen graphisch dargestellt.



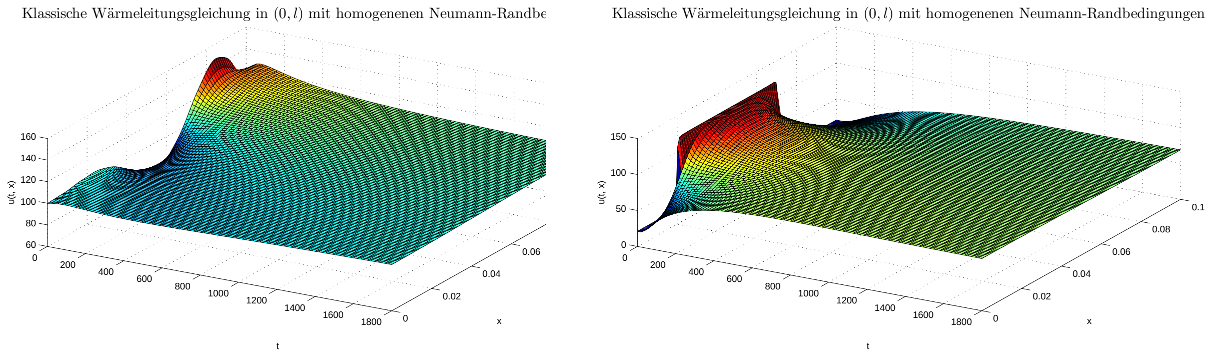
a) $u^0(x) = -25000x(x - L)\exp(10x)$, $x \in [0, l]$ b): $u^0 = 100\chi_{[0.02,0.07]}$

Abbildung 1

Nachfolgend untersuchen wir den Fall, dass der Stab am Rande thermisch isoliert ist, d.h., $\frac{\partial\theta(t,\cdot)}{\partial n} = 0$. Die Funktion θ muss also folgender Anfangsrandwertaufgabe

$$
\begin{aligned}
c\rho\theta_t - \kappa\theta_{xx} &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times (0, l), \\
-\theta'(t, 0) = \theta'(t, L) &= 0 \text{ in } (0, \infty), \\
\theta(0, \cdot) &= \theta^0 \text{ in } (0, l)
\end{aligned}
$$

genügen. Nachstehend werden die Lösungen zu verschiedenen Anfangsprofilen geplottet.



a) $u^0(x) = -25000\int_0^x \xi\sin(4 + 100\xi)e^{10\xi}d\xi + 100$, $x \in [0, l]$ b): $u^0 = 100\chi_{[0.02,0.07]}$

Abbildung 2

Beispiel 2 (Grundlösung der Poissongleichung – Lösungskern des Laplaceoperators):

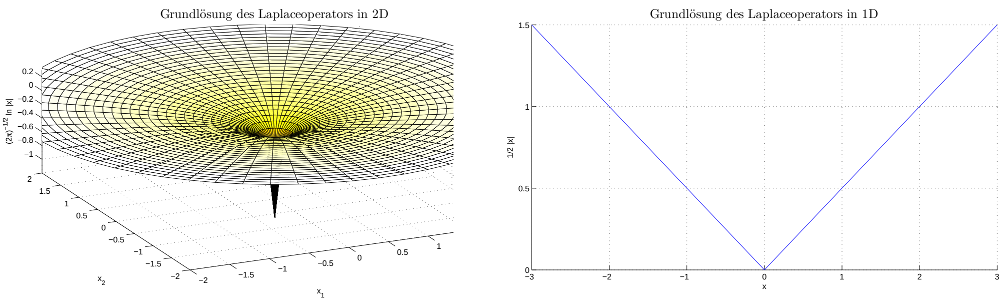
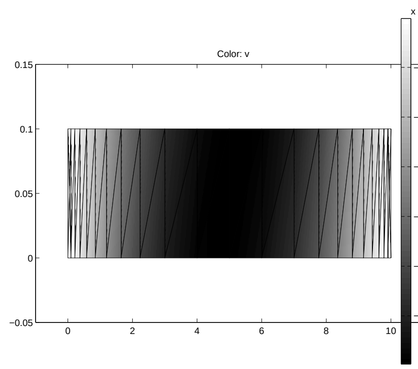


Abbildung 3

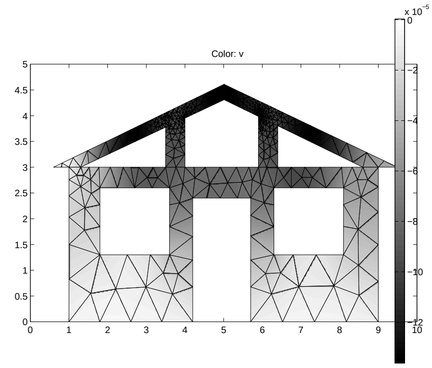
[1]Massendichte $\rho = 8000$ $[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}]$, Spezifische Wärmekapazität $c = 0,49$ $[\frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}]$, Spezifische Wärmeleitfähigkeit $\kappa = 53$ $[\frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}}]$.

Beispiele 3 (Gleichungen der Elastostatik – Lamé-System) Nachstehend werden einige Anwendungsbeispiele aus der Technischen Mechanik vorgestellt. Wir beschränken uns ausschließlich auf homogene, isotrope Stoffe. Diese werden durch die Dichte ρ [kg/m^3], den Elastizitätsmodul E [GPa] sowie die Poissonzahl $\nu \in (0, \frac{1}{2})$ charakterisiert, womit sich auch die Lamé-Konstanten $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ und $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ berechnen lassen.

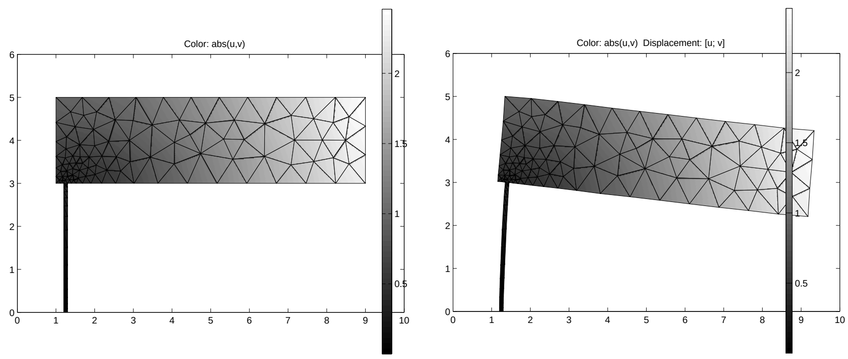
Beispiel 3a: Wir betrachten eine plattenförmige Stahlbrücke[2] mit den Abmessungen $10 \text{ m} \times 0,1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$, welche nur am linken und am rechten Rand befestigt ist. Die Brücke befinde sich im Gravitationsfeld der Erde. Die folgende Abbildung zeigt die Brücke im deformierten Zustand, wobei die Farbintensität der Verschiebung eines jeden Punktes in y–Richtung entspricht.



Beispiel 3b: Eine $0,1$–Meter dicke Betonwand[3] mit dem nachstehenden Profil (gemessen in Metern) sei am Boden befestigt. Unter Einwirkung der Schwerkraft entsteht folgendes Verschiebungsfeld in der y–Richtung:



Beispiel 3c: Abschließend geben wir ein Beispiel einer stark deformierten Struktur an. Ein Holzbalken (getrocknete Eiche[4]) mit den Abmessungen $2 \text{ m} \times 8 \text{ m} \times 0,5 \text{ m}$ sei mittels einer dünneren Holzplatte mit den Abmessungen $0,1 \text{ m} \times 3 \text{ m} \times 0,5 \text{ m}$ am Boden befestigt. Durch Einwirkung der Schwerkraft deformiert sich die Struktur am rechten Rand betragsmäßig um mehr als 2 m.



a) Referenzkonfiguration b) Deformierte Konfiguration

Literatur

[1] Khusainov, D. Ya., Pokojovy, M., Azizbayov, E. I. Classical Solvability for a Linear 1D Heat Equation with Constant Delay, Konstanzer Schriften in Mathematik, 316 (2013)

[2] Martensitischer Stahl bei 20°C: $\rho = 7770$ kg/m^3, $E = 195$ GPa, $\nu = 0,28$.
[3] Beton bei 20°C: $\rho = 2400$ kg/m^3, $E = 30$ GPa, $\nu = 0,2$.
[4] Eiche bei 20°C: $\rho = 710$ kg/m^3, $E = 12,5$ GPa, $\nu = 0,1$.