Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dr. Michael Pokojovy

Wintersemester 2013/2014

# Theorie und Numerik Partieller Differentialgleichungen

## 3. Übungsblatt

**Aufgabe 3.1** (4 Punkte)
Es seien $\Omega := (0, l)$, $l > 0$, und $u^0 \in \mathcal{C}^2\big(\bar{\Omega}\big)$ mit $u^0(0) = u^0(l) = 0$.

a) Finden Sie eine Lösung $u \in \mathcal{C}^0\big([0,\infty) \times \bar{\Omega}\big)$ mit $u_t, u_{xx} \in \mathcal{C}^0\big((0,\infty) \times \Omega\big)$ der Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) &= 0 \text{ für } (t,x) \in (0,\infty) \times \Omega, \\ u(t,x) &= 0 \text{ für } (t,x) \in (0,\infty) \times \partial\Omega, \\ u(0,x) &= u^0(x) \text{ für } x \in \Omega. \end{aligned}$$

b) Zeigen Sie, dass die Lösung $u$ von $u^0$ stetig abhängt, indem Sie beweisen, dass es eine Konstante $C > 0$ so gibt, dass

$$\sup_{t \in [0,\infty)} \|u(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} \le C\|u^0\|_{L^2(\Omega)}$$

gilt.

*Hinweis:* Wenden Sie die Parselvalsche Gleichung auf die Lösungsdarstellung aus a) an.

c) Beweisen Sie für $t > 0$, dass $u(t,\cdot) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ gilt.

**Lösung**

a) Wir führen eine Variablenseparation aus, indem wir die Gleichung auf die Eigenfunktionenbasis des elliptischen Operators für die Raumvariable einschränken. Wir betrachten also den negativen Dirichlet-Laplaceoperator

$$\mathcal{A}\colon H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega), \quad u \mapsto -u''.$$

Aus der Analysis 3 wissen wir, dass dieser positiv und symmetrisch (und sogar selbstadjungiert) ist. Dessen Spektrum $\sigma(\mathcal{A})$ besteht dabei ausschließlich aus Eigenwerten $\lambda_n = \big(\frac{\pi n}{l}\big)^2$, $n \in \mathbb{N}$, mit zugehörigen Eigenfunktionen $\varphi_n = \sin\big(\frac{\pi n}{l}\cdot\big)$, $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen, dass diese eine Orthonormalbasis in $L^2(\Omega)$ bilden. Leicht rechnen wir die Identität

$$\begin{aligned} \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle_{L^2((0,l))} &= \tfrac{2}{l} \int_0^\pi \sin(\tfrac{\pi n}{l}x)\sin(\tfrac{\pi n}{l}x)\mathrm{d}x = \tfrac{1}{l}\int_0^l \big(\cos \pi(n-m)\tfrac{x}{l} - \cos\pi(n+m)\tfrac{x}{l}\big)\,\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{l}\begin{cases} l, & n = m \\ \frac{l}{\pi(n-m)} \sin\frac{\pi(n-m)x}{l}\big|_{x=0}^{x=l}, & n \ne m \end{cases} - \tfrac{l}{\pi(n+m)} \sin \tfrac{\pi(n+m)x}{l}\big|_{x=0}^{x=l} = \delta_{nm} \end{aligned}$$

nach. Es muss noch gezeigt werden, dass $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Raum $L^2(\Omega) = L^2\big((0,l)\big)$ aufspannt.

Mit Satz 9.24 folgt, dass $(\sin(n\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Basis von $X := \{u \in L^2\big((-\pi,\pi)\big) \mid u = -u(-\cdot)\}$ bildet. Sei ferner $Y := \{u \in L^2\big((-l,l)\big) \mid u = -u(-\cdot)\}$. Da die lineare Transformation der Variablen einen Isomorphismus zwischen den Hilberträumen $X$ und $Y$ darstellt, ist $(\sin(\frac{\pi n}{l}\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Basis von $Y$. Offensichtlich sind nun $L^2\big((0,l)\big)$ und $Y$ isomorph, da sich $L^2\big((0,l)\big)$ durch ungerade Spiegelung dessen Elemente zu $Y$ fortsetzen lässt. Wendet man nun die Umkehrung dieses Isomorphismus' auf die Basis $(\sin(\frac{\pi n}{l}\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ von $Y$ an, so ergibt sich die Funktionenfolge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die nun eine Basis von $L^2\big((0,l)\big)$ ist.

Da für alle $T > 0$ jede klassische Lösung $u$ in $\mathcal{C}^0([0,T]\times\bar{\Omega}) \subset \mathcal{C}^0\big([0,T], L^2(\Omega)\big) \subset L^2\big((0,T)\times \Omega\big)$ liegt und $L^2\big((0,T)\times\Omega\big)$ zu $L^2\big((0,T)\big) \otimes L^2\big((0,L)\big)$ isomorph ist, lassen sich klassische Lösungen in der Form

$$u(t,\cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\varphi_n, \quad t \in [0,\infty)$$

mit $u_n \in \mathcal{C}^0\big([0,\infty),\mathbb{R}\big)$, $n \in \mathbb{N}$, eindeutig darstellen. Da $u^0$ glatt ist und $u^0(0) = u^0(l) = 0$ erfüllt, lässt sich $u^0$ in eine punktweise konvergente Fourierreihe entwickeln:

$$u^0 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u^0, \varphi_n\rangle_{L^2(\Omega)}\varphi_n,$$

die nach Satz 9.33 sogar in $L^\infty(\Omega)$ gegen $u^0$ konvergiert. Ferner erhalten wir für $t > 0$ formal die Identität

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n(t)\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \partial_{xx}(u_n(t)\varphi_n) = \partial_{xx}u(t,\cdot) = \partial_t u(t,\cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{u}_n(t)\varphi_n \text{ in } \Omega.$$

Multipliziert man die Gleichung skalar in $L^2(\Omega)$ mit $\varphi_n$, $n \in \mathbb{N}$, so führt dies auf ein System abzählbar vieler entkoppelter linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{aligned}&\dot{u}_n(t) = -\lambda_n u_n(t) \text{ für } t \in [0,\infty), n \in \mathbb{N},\\ &u_n(0) = \langle u^0, \varphi_n\rangle_{L^2(\Omega)}, n \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

welches eindeutig durch

$$u_n(t,\cdot) = e^{-\lambda_n t}\langle u^0, \varphi_n\rangle_{L^2(\Omega)}\varphi_n \text{ für } t \in [0,\infty), n \in \mathbb{N},$$

lösbar ist. Ferner konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}\langle u^0, \varphi_n\rangle_{L^2(\Omega)}\varphi_n$$

auf jedem Kompaktum $[0,T]\times\bar{\Omega}$ absolut und gleichmäßig gegen eine stetige Funktion, da alle Folgenglieder stetig in $[0,T]\times\bar{\Omega}$ sind und

$$\sum_{n=m}^{\infty} \|e^{-\lambda_n t}\langle u^0, \varphi_n\rangle_{L^2(\Omega)}\varphi_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \sum_{n=m}^{\infty} \|\langle u^0, \varphi_n\rangle_{L^2(\Omega)}\varphi_n\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0 \text{ für } m \to \infty$$

gilt. Auf jedem Kompaktum $[t_0,t_1]\times\bar{\Omega} \subset [0,\infty)\times\bar{\Omega}$ konvergiert auch die Reihe

$$\partial_t u(t,\cdot) = \partial_{xx}^2 u(t,\cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e^{-\lambda_n t}\langle u^0, \varphi_n\rangle_{L^2(\Omega)}\varphi_n$$

absolut und gleichmäßig, da für $t \geq t_0 > 0$

$$\sum_{n=m}^{\infty} \lambda_n \|u_n(t)\varphi_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \sum_{n=m}^{\infty} \left(\tfrac{\pi n}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t} \underbrace{\|\langle u^0, \varphi_n\rangle_{L^2(\Omega)}\varphi_n\|_{L^\infty(\Omega)}}_{\leq \sqrt{\frac{2}{l}}\|u^0\|_{L^\infty(\Omega)}}$$

$$\leq C(t_0) \sum_{n=m}^{\infty} \tfrac{1}{n^2} \to 0 \text{ für } m \to \infty$$

gilt, woraus sich $u_t, u_{xx} \in \mathcal{C}^0\big((0,\infty) \times \Omega\big)$ ergibt.

b) Aus Parsevalscher Gleichung wissen wir

$$\|u(t,\cdot)\|^2_{L^2((\Omega))} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\lambda_n t}\langle u^0, \varphi_n\rangle^2_{L^2(\Omega)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \langle u^0, \varphi_n\rangle^2_{L^2(\Omega)} = \|u^0\|^2_{L^2((\Omega))}.$$

c) Für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ ist $u_n$ als Verknüpfung unendlich oft differenzierbarer Funktionen $k$-mal stetig stetig differenzierbar und es gilt

$$|\partial_x^k (u_n(t)\varphi_n)| \leq \lambda_n^k e^{-\lambda_n t} |\langle u^0, \varphi_n\rangle_{L^2(\Omega)}| \text{ für } t \in [0,\infty).$$

Wegen

$$\sum_{n=m}^{\infty} \|\partial_x^k (u_n(t)\varphi_n)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \sum_{n=m}^{\infty} \underbrace{|(\tfrac{\pi n}{l})^{2k} e^{-\lambda_n t}|}_{\leq \frac{C_k(t)}{n^2}} \underbrace{\langle u^0, \varphi_n\rangle_{L^2(\Omega)}}_{\leq \|u^0\|_{L^\infty(\Omega)}} \underbrace{\|\varphi_n\|_{L^\infty(\Omega)}}_{\leq \sqrt{\frac{2}{l}}} < \infty \text{ für } m \to \infty, t > 0$$

konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \partial_x^k (u_n(t)\varphi_n)$$

für jedes feste $t > 0$ absolut und gleichmäßig auf $\bar{\Omega}$ gegen die stetige Funktion $\partial_x^k u(t,\cdot)$. Daher gilt

$$u(t,\cdot) \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}) \subset \mathcal{C}^\infty(\Omega).$$

$\square$

**Aufgabe 3.2** (4 Punkte)

a) Beweisen Sie, dass die Funktion $g\colon \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2\pi}\ln(|x|)$, eine reguläre Distribution erzeugt, die eine Grundlösung des Laplaceoperators $\triangle$ im $\mathbb{R}^2$ ist.

b) Bestimmen Sie eine Grundlösung zum Laplaceoperator $\partial_x^2$ im $\mathbb{R}$ und begründen Sie Ihre Aussage.

**Lösung**

a) Offensichtlich gilt $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$, denn: Einerseits ist $g = \frac{1}{2\pi}\ln(|\cdot|)\chi_{\mathbb{R}^2\backslash\{0\}}$ messbar. Andererseits folgt für jedes Kompaktum $K \subset B(0,R)$ mit dem Transformationssatz

$$\int_K |g(x)|\mathrm{d}x \leq \int_{B(0,R)} |g(x)|\mathrm{d}x = \int_0^R \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2\pi} r \ln r \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r \leq \int_0^R r \ln r \mathrm{d}r < \infty,$$

wobei

$$\int_0^R r\ln r\mathrm{d}r = \left|\begin{array}{rcl} u &=& \ln r \\ \mathrm{d}v &=& r\mathrm{d}r \\ \mathrm{d}u &=& \frac{1}{r}\mathrm{d}r \\ v &=& \frac{r^2}{2} \end{array}\right| = uv|_{r=0}^{r=R} - \int_0^R v(r)u'(r)\mathrm{d}r = \tfrac{r^2\ln r}{2}|_{r=0}^{r=R} - \int_0^R \tfrac{r}{2}\mathrm{d}r \tag{1}$$
$$= \tfrac{R^2\ln R}{2} - \tfrac{R^2}{4} < \infty,$$

da $\lim\limits_{r\to 0} r^2\ln r = 0$ nach der Regel von de L'Hôpital gilt.

Es ist $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2\backslash\{0\}, \mathbb{R})$. Für $x \neq 0$ findet man leicht

$$\partial_i g(x) = \tfrac{1}{2\pi}\tfrac{x_i}{|x|^2}, \quad \partial_{ii}g(x) = -\tfrac{1}{2\pi}\tfrac{2x_i^2-|x|^2}{|x|^4}, \quad \triangle g(x) = \sum_{i=1}^2 \partial_{ii}g(x) = 0.$$

Sei nun $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$\triangle[g](\varphi) = \int_{\mathbb{R}^2} g(x)\triangle\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{B(0,\varepsilon)} g(x)\triangle\varphi(x)\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^2\backslash B(0,\varepsilon)} g(x)\triangle\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Ferner folgt mit (1) für $\varepsilon \in (0,1)$

$$\begin{aligned}\left|\int_{B(0,\varepsilon)} g(x)\triangle\varphi(x)\mathrm{d}x\right| &\leq \tfrac{1}{2\pi}\max_{|x|\leq\varepsilon}|\triangle\varphi(x)|\int_{B(0,\varepsilon)}|\ln|x||\mathrm{d}x \\ &= \max_{|x|\leq\varepsilon}|\triangle\varphi(x)|\int_0^\varepsilon(-r\ln r)\mathrm{d}r \\ &\leq \max_{|x|\leq\varepsilon}|\triangle\varphi(x)|\left(\tfrac{\varepsilon^2}{4} - \tfrac{\varepsilon^2\ln\varepsilon}{2}\right) \to 0 \text{ für } \varepsilon \to 0.\end{aligned}$$

Die Greensche Formel ergibt ferner

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2\backslash B(0,\varepsilon)} g(x)\triangle\varphi(x)\mathrm{d}x &= \int_{\partial B(0,\varepsilon)}\langle\nabla\varphi(x), \tfrac{x}{|x|}\rangle g(x)\mathrm{d}A(x) - \int_{\mathbb{R}^2\backslash B(0,\varepsilon)}\langle\nabla g(x), \nabla\varphi(x)\rangle\mathrm{d}x \\ &= \int_{\partial B(0,\varepsilon)}\Big(\langle\nabla\varphi(x), \tfrac{x}{|x|}\rangle g(x) - \langle\nabla g(x), \tfrac{x}{|x|}\rangle\varphi(x)\Big)\,\mathrm{d}A(x) + \\ &\quad \int_{\mathbb{R}^2\backslash B(0,\varepsilon)}\varphi(x)\underbrace{\triangle g(x)}_{=0}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Nun folgt

$$\left|\int_{\partial B(0,\varepsilon)}\langle\nabla\varphi(x), \tfrac{x}{|x|}\rangle g(x)\mathrm{d}A(x)\right| \leq \max_{|x|=\varepsilon}\left(|\nabla\varphi(x)| + |\varphi(x)|\right)\tfrac{1}{2\pi}\left(-\ln\varepsilon\right)2\pi\varepsilon \to 0 \text{ für } \varepsilon \to 0$$

sowie

$$\int_{\partial B(0,\varepsilon)}\langle\nabla g(x), \tfrac{x}{|x|}\rangle|\varphi(x)\mathrm{d}A(x) \to \varphi(0),$$

denn

$$\begin{aligned}\int_{\partial B(0,\varepsilon)}\langle\nabla g(x), \tfrac{x}{|x|}\rangle\varphi(x)\mathrm{d}A(x) &= \tfrac{1}{2\pi}\int_{\partial B(0,\varepsilon)}\underbrace{\langle\tfrac{x}{\varepsilon^2}, \tfrac{x}{\varepsilon}\rangle}_{=\frac{1}{\varepsilon}}\varphi(x)\mathrm{d}A(x) \\ &= \tfrac{1}{A(\partial B(0,\varepsilon))}\int_{\partial B(0,\varepsilon)}\varphi(x)\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{A(\partial B(0,\varepsilon))}\int_{\partial B(0,\varepsilon)}(\varphi(x) - \varphi(0))\mathrm{d}x + \varphi(0) \to \varphi(0) \text{ für } \varepsilon \to 0,\end{aligned}$$

da $\varphi$ gleichmäßig stetig in einer Umgebung von 0 ist.

Insgesamt haben wir gezeigt

$$\triangle[g](\varphi) = \varphi(0) + O(\varepsilon \ln \varepsilon) = \varphi(0) + o(1) \text{ für } \varepsilon \to 0$$

und damit

$$\triangle[g](\varphi) = \delta_0(\varphi) \text{ für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2).$$

b) Wir nehmen an, dass $g$ eine gerade Funktion ist. Mit einer (zunächst) formalen Rechnung finden wir

$$g'' = \delta_0 \Leftrightarrow \tfrac{1}{2}(g(\cdot) + g(-\cdot))'' = \delta_0 \Leftarrow g' = \tfrac{1}{2}(H - H(-\cdot)) \Leftarrow g = \tfrac{1}{2}|\cdot|,$$

wobei $H$ die Heavyside-Funktion bezeichnet. Nun rechnen wir nach, dass $g(x) = \frac{1}{2}|x|$, $x \in \mathbb{R}$, eine reguläre Distribution erzeugt, die eine Grundlösung von $\partial_x^2$ im $\mathbb{R}$ darstellt.

Wegen $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ folgt trivial $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Außerdem gilt $g' = 0$ in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Nun gilt für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ und $\varepsilon > 0$

$$\partial_x^2[g](\varphi) = \tfrac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |x|\varphi''(x)\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |x|\varphi''(x)\mathrm{d}x.$$

Unter Beachtung von

$$\begin{aligned}
\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |x|\varphi''(x)\mathrm{d}x &= \int_{-\varepsilon}^{0} -x\varphi''(x)\mathrm{d}x + \int_0^{\varepsilon} x\varphi''(x)\mathrm{d}x \\
&= -x\varphi'(x)|_{x=-\varepsilon}^{x=0} + x\varphi'(x)|_{x=0}^{x=\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{0} \varphi'(x)\mathrm{d}x - \int_0^{\varepsilon} \varphi'(x)\mathrm{d}x \\
&= O(\varepsilon) + \varphi(0) - \varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon) + \varphi(0) = 2\varphi(0) + O(\varepsilon)
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}\backslash(-\varepsilon,\varepsilon)} |x| \cdot \varphi''(x)\mathrm{d}x &= |x| \cdot \varphi'(x)|_{x=-\infty}^{x=-\varepsilon} + |x| \cdot \varphi'(x)|_{x=\varepsilon}^{x=\infty} - \int_{\mathbb{R}\backslash(-\varepsilon,\varepsilon)} \operatorname{sign}(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x \\
&= -\varepsilon\varphi'(-\varepsilon) + \varepsilon\varphi'(\varepsilon) - \operatorname{sign}(x) \cdot \varphi(x)|_{x=-\varepsilon}^{x=\varepsilon} + \int_{\mathbb{R}\backslash(-\varepsilon,\varepsilon)} 0 \cdot \varphi(x)\mathrm{d}x \\
&= \varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon) + O(\varepsilon) = O(\varepsilon)
\end{aligned}$$

folgt

$$\partial_x^2[g](\varphi) = \varphi(0) + O(\varepsilon) \text{ für } \varepsilon \to 0.$$

Daher

$$\partial_x^2[g] = \delta_0.$$

□

**Aufgabe 3.3** (4 Punkte)

Es bezeichnen $\mu \in (0, \frac{1}{2})$, $E > 0$ die Poissonzahl und den Youngschen Elastizitätsmodul.

a) Zeigen Sie, dass die Plattengleichung im $\mathbb{R}^3$ eine Grundlösung besitzt, indem Sie beweisen, dass ein $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ mit

$$\triangle^2 g = \delta_0$$

existiert. Es muss keine explizite Darstellung der Grundlösung hergeleitet werden!

*Hinweis:* Betrachten Sie das System $\begin{cases} \triangle g = f, \\ \triangle f = \delta_0. \end{cases}$

b) Zeigen Sie dann für die in der Teilaufgabe a) gefundene Distribution $g$, dass die Abbildung

$$u_{ij} = -\tfrac{1}{E} \sum_{m=1}^{3} \Big( \delta_{ij} \partial_m^2 g - \tfrac{1}{2(1-\nu)} \delta_{im} \partial_j \partial_m g \Big)$$

in $L\big(\mathcal{D}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^{3\times 3}), \mathbb{R}^{3\times 3}\big)$ liegt und eine Tensorgrundlösung des Operators der Elastostatik darstellt, d.h., $u_{ij}$ genügt dem System

$$-\sum_{k=1}^{3} \big( \tfrac{E}{1-2\nu} \partial_k \partial_j u_{ik} + E \partial_k^2 u_{ik} \big) = \delta_0 \delta_{ij} \text{ für } i, j = 1, 2, 3.$$

*Hinweis:* Rechnen Sie die Gleichheit komponentenweise nach.

**Lösung**

a) Wir suchen $g, f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ mit

$$\begin{cases} \triangle g = f, \\ \triangle f = \delta_0. \end{cases}$$

Nach Satz 22.11 erzeugt die Funktion $F = \frac{1}{4\pi|\cdot|} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ eine reguläre Distribution $f = [G]$, welche die Gleichung $\triangle f = \delta_0$ löst. Es bleibt also ein $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ mit

$$\triangle g(\varphi) = f(\varphi) = [F](\varphi) = \int_{\mathbb{R}^3} F \varphi \mathrm{d}x$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ zu bestimmen.

Die gesuchte distributionelle Lösung der Plattengleichung ist also (formal) durch

$$g(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^3} \left(F * (F * \varphi)\right)(x) \mathrm{d}x \text{ für } \varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

gegeben. Wir müssen aber noch beweisen, dass $g$ tatsächlich eine Distribution ist.

Da $F \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3 \backslash \{0\})$ und $F(x) \to 0$ für $|x| \to \infty$, gilt

$$F = \underbrace{F\chi_{B(0,1)}}_{\in L^1(\mathbb{R}^3)} + \underbrace{F\chi_{\mathbb{R}^3 \backslash B(0,1)}}_{\in L^\infty(\mathbb{R}^3)}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} |F*(F*\varphi)|(x)\mathrm{d}x &= \|F*(F*\varphi)\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \\
&= \|(F\chi_{B(0,1)} + F\chi_{\mathbb{R}^3\backslash B(0,1)}) * ((F\chi_{B(0,1)} + F\chi_{\mathbb{R}^3\backslash B(0,1)}) * \varphi)\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \\
&= \|F\chi_{B(0,1)} * (F\chi_{B(0,1)} * \varphi)\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} + 2\|F\chi_{B(0,1)} * (F\chi_{\mathbb{R}^3\backslash B(0,1)} * \varphi)\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} + \\
&\quad \|F\chi_{\mathbb{R}^3\backslash B(0,1)} * (F\chi_{\mathbb{R}^3\backslash B(0,1)} * \varphi)\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \\
&\le \|F\chi_{B(0,1)}\|^2_{L^1(\mathbb{R}^3)} \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} + \|F\chi_{\mathbb{R}^3\backslash B(0,1)}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|F\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} + \\
&\quad \|F\chi_{\mathbb{R}^3\backslash B(0,1)}\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^3)},
\end{aligned}$$

wobei hier wegen $F \ge 0$

$$\begin{aligned}
\|F\chi_{B(0,1)} * F\chi_{B(0,1)}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} (F\chi_{B(0,1)})(x)(F\chi_{B(0,1)})(x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} (F\chi_{B(0,1)})(x) \int_{\mathbb{R}^3} (F\chi_{B(0,1)})(x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \left( \int_{\mathbb{R}} (F\chi_{B(0,1)})(x)\mathrm{d}x \right) = \|F\chi_{B(0,1)}\|^2_{L^1(\mathbb{R}^3)}
\end{aligned}$$

nach Fubini & Tonelli gilt.

Einerseits ist also $g$ wohldefiniert, da $g$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}'(\varphi)$ existiert und endlich ist. Andererseits ist $g$ stetig in der Topologie von $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$, da $|g(\varphi)| \to 0$ für $\varphi \to 0$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$. Nach Konstruktion gilt außerdem

$$\triangle^2 g(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^3} (F * (F * \triangle^2 \varphi))(x) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} (F * \triangle \varphi) \mathrm{d}x = \delta_0(\varphi) = \varphi(0).$$

**Bemerkung:** Es ist zu beachten, dass die auf diese Weise konstruierte Distribution $g$ nicht regulär ist, da das $F * F$ definierende Integral divergiert. Es existieren weitere (komplizier-tere) Zugänge zur Konstruktion von $g$, die dann aber reguläre Distribution als Grundlösung liefern.

b) Da distributionelle Ableitungen kommutieren, gelten für den Tensor $u_{ij}$ die Identitäten

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{3} \partial_k \partial_j u_{ik} &= -\tfrac{1}{E} \sum_{k=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} \left( \delta_{ik} \partial_m \partial_m \partial_k \partial_j g - \tfrac{1}{2(1-\nu)} \delta_{im} \partial_k \partial_m \partial_k \partial_j \right), \\
\sum_{k=1}^{3} \partial_k \partial_k u_{ij} &= -\tfrac{1}{E} \sum_{k=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} \left( \delta_{ij} \partial_m \partial_m \partial_k \partial_k g - \tfrac{1}{2(1-\nu)} \delta_{im} \partial_j \partial_m \partial_k \partial_k g \right).
\end{aligned}$$

Beachtet man nun die sogenannten kleinen und großen Symmetrien

$$\sum_{k=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} \delta_{ik} \partial_m \partial_m \partial_k \partial_j g = \sum_{k=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} \delta_{im} \partial_k \partial_m \partial_k \partial_j g = \sum_{k=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} \delta_{im} \partial_j \partial_m \partial_k \partial_k g,$$

so ergibt sich ferner

$$\begin{aligned}
-\sum_{k=1}^{3} \left( \tfrac{E}{1-2\nu} \partial_k \partial_j u_{ik} + E \partial_k \partial_k u_{ik} \right) &= \sum_{k=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} \left( \tfrac{1}{1-2\nu} \delta_{ik} \partial_m \partial_m \partial_k \partial_j g - \tfrac{1}{2(1-\nu)(1-2\nu)} \delta_{im} \partial_k \partial_m \partial_k \partial_j g \right) + \\
&\quad \sum_{k=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} \left( \delta_{ij} \partial_m \partial_m \partial_k \partial_k g - \tfrac{1}{2(1-\nu)} \delta_{im} \partial_j \partial_m \partial_k \partial_k g \right) \\
&= \left( \tfrac{1}{1-2\nu} - \tfrac{1}{2(1-\nu)(1-2\nu)} - \tfrac{1}{2(1-\nu)} \right) \sum_{j=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} \delta_{ij} \partial_m \partial_m \partial_k \partial_j g + \\
&\quad \sum_{k=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} \delta_{ij} \partial_k \partial_k \partial_m \partial_m g = \delta_{ij} \triangle^2 g = \delta_{ij} \delta_0.
\end{aligned}$$

**Bemerkung:** Führt man die sogenannten Lamé-Konstanten ein

$$\lambda = \tfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{ und } \mu = \tfrac{E}{2(1+\nu)},$$

so lassen sich die Gleichungen der Elastostatik äquivalent als die aus dem ersten Blatt bekannten Lamé-Glechungen umschreiben.

□