Aufgabe 4.2. Sei $\Omega := B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ und es seien mit

$$\Phi\colon (0,1)\times(0,2\pi) \to \big(\Omega\backslash([0,1]\times\{0\})\big), \qquad (r,\varphi)\mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)),$$
$$\Psi\colon (0,2\pi) \to \big(\partial\Omega\backslash\{(1,0)\}\big), \qquad \varphi\mapsto (\cos(\varphi),\sin(\varphi)),$$

der zu den Polarkoordinaten gehörige $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus Φ bzw. Homömorphismus Ψ bezeichnet. Ferner seien die Funktionen $g\colon [0,2\pi]\to\mathbb{R}$, $v\colon [0,1]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ durch die Reihen

$$g(\varphi) := \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sin(n!\varphi)}{n^2}, \qquad v(r,\varphi) := \sum_{n=3}^{\infty} \frac{r^{n!}\sin(n!\varphi)}{n^2}$$

definiert. Beweisen Sie:

a) Die Funktion $g\circ\Psi^{-1}$ lässt sich eindeutig zu einem $f\in\mathcal{C}^0(\partial\Omega)$ fortsetzen.

b) Die Funktion $v\circ\Phi^{-1}$ lässt sich eindeutig zu einem $u\in\mathcal{C}^2(\Omega)\cap\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ fortsetzen, welches die Randwertaufgabe

$$\triangle u = 0 \text{ in } \Omega, \quad u = f \text{ in } \partial\Omega$$

löst.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis davon ausgehen, dass für $w\in\mathcal{C}^2\big((0,1)\times(0,2\pi)\big)$

$$(\triangle(w\circ\Phi^{-1}))\circ\Phi = w_{rr} + \tfrac{1}{r}w_r + \tfrac{w_{\varphi\varphi}}{r^2} \text{ für } (r,\varphi)\in(0,1)\times(0,2\pi)$$

gilt.

c) Es gilt: $\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \mathrm{d}x = \infty$.

Lösung

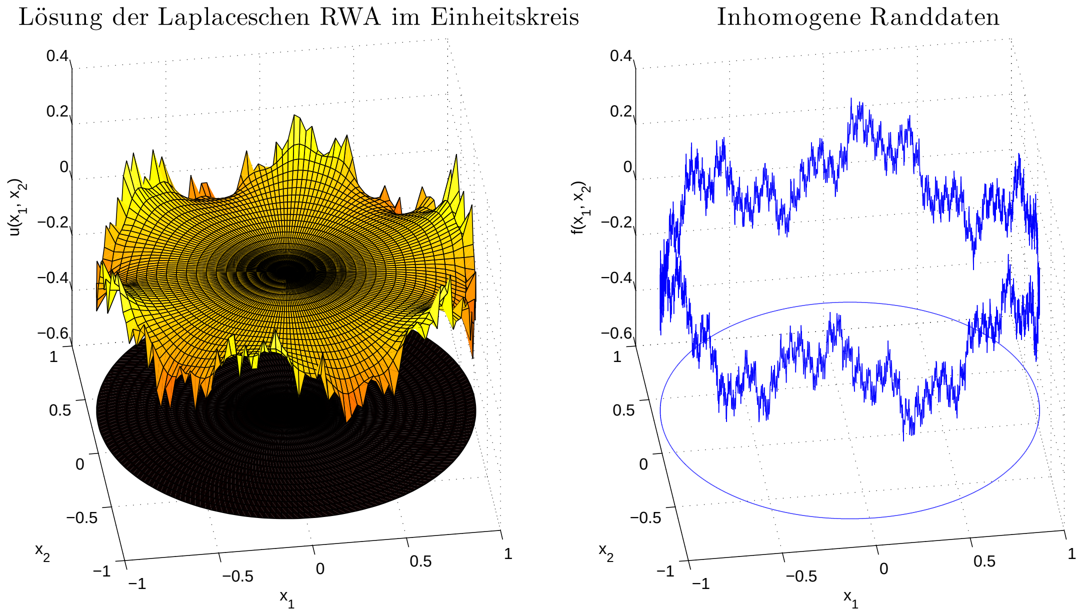

Abbildung 1

a) Wir zeigen zunächst, dass g wohldefiniert ist und $g \in \mathcal{C}^0([0,2\pi],\mathbb{R})$ erfüllt. Offensichtlich sind die Folgenglieder $\varphi \mapsto \frac{r^{n!}\sin(n!\varphi)}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$, stetig in $[0,2\pi]$. Außerdem konvergiert die Reihe absolut und gleichmäßig, da

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left|\tfrac{\sin(n!\varphi)}{n^2}\right| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \tfrac{1}{n^2} \to 0 \text{ für } n_0 \to \infty$$

für alle $\varphi \in [0,2\pi]$ gilt.

Wir definieren

$$f(x) := \begin{cases} (g \circ \Psi^{-1})(x), & x \in \partial\Omega\backslash\{(0,1)\}, \\ 0, & x = (0,1) \end{cases}$$

und zeigen, dass f stetig ist. Da Ψ ein Homöomorphismus ist, folgt unmittelbar $g \circ \Psi^{-1} \in \mathcal{C}^0(\partial\Omega\backslash\{(0,1)\},\mathbb{R})$.

- Sei nun $x_0 \in \partial\Omega\backslash\{(0,1)\}$ und sei $(x_n)_n \subset \partial\Omega$ mit $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $|x_n - x_0| < |x_0 - (1,0)|$ für $n \geq n_0$ gilt. Also ist $(x_n)_{n \geq n_0} \subset \partial\Omega\backslash\{(0,1)\}$. Damit gilt
$$|f(x_n) - f(x_0)| = |(g \circ \Psi^{-1})(x_n) - (g \circ \Psi^{-1})(x_0)| \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$
- Ferner sei $x_0 = (0,1)$ und sei $(x_n)_n \subset \partial\Omega$ mit $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert $\varphi_n \in [0,2\pi]$ mit $x_n = (\cos\varphi_n, \sin\varphi_n)$. Wegen $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$ existieren $I_1, I_2 \subset \mathbb{N}$ mit $\mathbb{N} = I_1 \dot\cup I_2$ und $(\varphi_n')_n \subset [0,2\pi]$ mit $\varphi_n' \to 0$ so, dass $\varphi_n = \begin{cases} \varphi_n', & n \in I_1 \\ 2\pi - \varphi_n', & n \in I_2 \end{cases}$ gilt.
Nun folgt
$$\begin{aligned} |f(x_n) - f(x_0)| &= \begin{cases} \left|\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{\sin(n!\varphi_n')}{n^2}\right|, & n \in I_1 \\ \left|\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{\sin(n!(2\pi-\varphi_n')}{n^2}\right|, & n \in I_2 \end{cases} \\ &= \left|\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sin(n!\varphi_n')}{n^2}\right| = g(\varphi_n') \to g(0) = 0 \text{ für } n \to \infty. \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir $f \in \mathcal{C}^0(\partial\Omega,\mathbb{R})$ und $f|_{\partial\Omega\backslash\{(0,1)\}} = g \circ \Psi^{-1}$ bewiesen.

b) Wir zeigen zunächst, dass $v \in \mathcal{C}^0\big([0,1] \times [0,2\pi]\big) \cap \mathcal{C}^2\big([0,1) \times [0,2\pi]\big)$ gilt. Die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenreihe und die Stetigkeit der Grenzfunktion folgt analog zu a). Um die zweifache stetige Differenzierbarkeit zu zeigen, betrachten wir ein beliebiges $r_0 \in (0,1)$ und finden für $\alpha \in \mathbb{N}_0^2$, $|\alpha| \leq 2$,

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |\partial^\alpha v(r,\varphi)| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{(n!)^2 r_0^{n!-2}}{n^2} \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} (n!)^2 r_0^{n!} \to 0 \text{ für } n_0 \to \infty$$

gleichmäßig bzgl. $r \in [0,r_0]$, $\varphi \in [0,2\pi]$, wobei die Konvergenz mit dem Quotientenkriterium folgt.

Da Φ ein $\mathcal{C}^\infty$-Diffeomorphismus ist, folgt mit der Kettenregel, dass $v \circ \Phi^{-1} \in \mathcal{C}^2\big(\Omega\backslash([0,1] \times \{0\})\big)$ gilt. Außerdem sehen wir leicht ein, dass sich Φ auf $[0,1] \times [0,2\pi]$ stetig zu einem $\tilde\Phi$ fortsetzen lässt. Wir definieren

$$u(x) = \begin{cases} (v \circ \Phi^{-1})(x), & x \in \bar\Omega\backslash([0,1] \times \{0\}), \\ f(x), & x \in \partial\Omega, \\ 0, & x \in [0,1] \times \{0\}. \end{cases}$$

Wir beweisen, dass $u \in \mathcal{C}^0(\bar\Omega)$.

- Sei $x_0 \in \Omega\backslash([0,1]\times\{0\})$ und sei $(x_n)_n \subset \bar{\Omega}$ mit $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$. Analog zu a) wählen wir $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $(x_n)_{n\geq n_0} \subset \Omega\backslash([0,1]\times\{0\})$ gilt. Dann gilt $|u(x_n)-u(x_0)| = |(v\circ\Phi^{-1})(x_n)-(v\circ\Phi^{-1})(x_0)| \to 0$ für $n\to\infty$ wegen der Stetigkeit von $v\circ\Phi^{-1}$.
- Sei $x_0 \in \partial\Omega\backslash\{(0,1)\}$, d.h., $x_0 = (\cos\varphi_0, \sin\varphi_0)$ für ein $\varphi_0 \in (0,2\pi)$, und sei $(x_n)_n \subset \bar{\Omega}$ mit $x_n \to x_0$ für $n\to\infty$. Dann gibt es $(\varphi_n)_n$, $(r_n)_n$ mit $\varphi_n \to \varphi_0$, $r_n \to 0$ für $n\to\infty$. Ferner existiert $n_0\in\mathbb{N}$ so, dass $(x_n)_{n\geq n_0} \subset \bar{\Omega}\backslash([0,1]\times\{0\})$ gilt. Also

$$
\begin{aligned}
|u(x_n)-u(x_0)| &\leq \begin{cases} |(v\circ\Phi^{-1})(x_n) - f(x_0)|, & x_n \in x \in \Omega\backslash([0,1]\times\{0\}) \\ |f(x_n)-f(x_0)|, & x_n \in \partial\Omega \end{cases} \\
&\leq \begin{cases} \sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{(1-r_n^{n!})\sin(n!\varphi_n)}{n^2}, & x_n \in x \in \Omega\backslash([0,1]\times\{0\}) \\ |f(x_n)-f(x_0)|, & x_n \in \partial\Omega \end{cases} \to 0 \text{ für } n\to\infty
\end{aligned}
$$

  wegen der gleichmäßigen Konvergenz der ersten Reihe bzgl. $r\in[0,1]$, $\varphi\in[0,2\pi]$ sowie der Stetigkeit von f.
- Der Fall $x_0 = (1,0)$ lässt sich analog zum vorangehenden Fall sowie a) behandeln.
- Sei $x_0 \in [0,1)\times\{0\}$, d.h., $x_0 = (r_0, 0)$, $r_0\in[0,1)$, und sei $(x_n)_n \subset \bar{\Omega}$ mit $x_n \to x_0$ für $n\to\infty$. Analog zu a) folgern wir die Existenz von $I_1, I_2 \subset \mathbb{N}$ mit $I_1 \dot{\cup} I_2 = \mathbb{N}$ und $(\varphi_n')_n \subset [0,2\pi]$, $r_n \subset [0,1]$ mit $\varphi_n' \to 0$, $r_n \to r_0$ für $n\to\infty$ und

$$
x_n = \begin{cases} (r_n\cos\varphi_n', r_n\sin\varphi_n'), & n\in I_1, \\ (r_n\cos(2\pi-\varphi_n'), r_n\sin(2\pi-\varphi_n')), & n\in I_2. \end{cases}
$$

  Damit gilt

$$
\begin{aligned}
|u(x_n)-u(x_0)| = |u(x_n)| = |v(r_n,\varphi_n)| &\leq \begin{cases} \sum\limits_{n=3}^{\infty} |\frac{r_n^{n!}\sin(n!\varphi_n)}{n^2}|, & n\in I_1 \\ \sum\limits_{n=3}^{\infty} |\frac{r_n^{n!}\sin(n!(2\pi-\varphi_n))}{n^2}|, & n\in I_2 \end{cases} \\
&= \sum_{n=3}^{\infty} |\frac{r_n^{n!}\sin(n!\varphi_n)}{n^2}| \to 0 \text{ für } n\to\infty.
\end{aligned}
$$

  wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe.

Insgesamt haben wir also $u\in\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ gezeigt.

Für $x\in\Omega\backslash([0,1]\times\{0\})$ gilt

$$
\begin{aligned}
(\nabla u)\circ\Phi &= \begin{pmatrix} \cos\varphi\partial_r - \frac{1}{r}\sin\varphi\partial_\varphi \\ \sin\varphi\partial_r + \frac{1}{r}\cos\varphi\partial_\varphi \end{pmatrix} v, \\
\nabla^2 u &= \begin{pmatrix} \cos^2\varphi\partial_r^2 - \frac{\sin 2\varphi}{r}\partial_r\partial_\varphi + \frac{\sin^2\varphi}{r^2}\partial_\varphi^2 + \frac{\sin 2\varphi}{r^2}\partial_\varphi + \frac{\sin^2\varphi}{r}\partial_r & \frac{\sin 2\varphi}{2}\partial_r^2 - \frac{\cos 2\varphi}{r^2}\partial_\varphi + \frac{\cos 2\varphi}{r}\partial_r\partial_\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2r}\partial_r - \frac{\sin 2\varphi}{2r^2}\partial_\varphi^2 \\ \frac{\sin 2\varphi}{2}\partial_r^2 - \frac{\cos 2\varphi}{r^2}\partial_\varphi + \frac{\cos 2\varphi}{r}\partial_r\partial_\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2r}\partial_r - \frac{\sin 2\varphi}{2r^2}\partial_\varphi^2 & \sin^2\varphi\partial_r^2 + \frac{\sin 2\varphi}{r}\partial_r\partial_\varphi + \frac{\cos^2\varphi}{r^2}\partial_\varphi^2 - \frac{\sin 2\varphi}{r^2}\partial_\varphi + \frac{\cos^2\varphi}{r}\partial_r \end{pmatrix} v, \\
\triangle u &= \left(\partial_r^2 + \tfrac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 + \tfrac{1}{r}\partial_r\right) v.
\end{aligned}
$$

Exemplarisch gilt

$$
\partial_r^2 v = \sum_{n=3}^{\infty} n!(n!-1)\frac{r^{n!-2}\sin(n!\varphi)}{n^2}, \quad \tfrac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 v = -\sum_{n=3}^{\infty}(n!)^2\frac{r^{n!-2}\sin(n!\varphi)}{n^2} \text{ usw.}
$$

Deshalb konvergieren die obigen Reihe gleichmäßig auf $[0,r_0]\times[0,2\pi]$ gegen stetige Grenzfunktionen. Da die Reihen in $r=0$ verschwinden, lässt sich analog zum obigen Stetigkeitsbeweis für

u zeigen, dass auch ∇u, $\nabla^2 u$ stetig auf $\overline{B(0,r_0)}$, woraus sich die behauptete Regularität von u ergibt. Dabei war es wichtig, da die Potenzreihen bei r^3 beginnen, was uns die Stetigkeit von ∇u und $\nabla^2 u$ in 0 liefert.

Nun rechnen wir für in $\Omega \backslash ([0,1] \times \{0\})$ bzw. $(0,1) \times (0,2\pi)$ nach:

$$
\begin{aligned}
(\triangle u) \circ \Phi &= v_{rr} + \tfrac{1}{r} v_r + \tfrac{v_{\varphi\varphi}}{r^2} \\
&= \sum_{n=3}^{\infty} n!(n!-1) \frac{r^{n!-2}\sin(n!\varphi)}{n^2} + \sum_{n=3}^{\infty} n! \frac{r^{n!-2}\sin(n!\varphi)}{n^2} - \sum_{n=3}^{\infty} (n!)^2 \frac{r^{n!-2}\sin(n!\varphi)}{n^2} = 0,
\end{aligned}
$$

wobei wir die Grenzprozesse wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihen vertauschen dürfen. Nun gilt $\triangle u \equiv 0$ in ganz Ω, da $\triangle u$ in Ω stetig ist und Ω der Abschluss von $\Omega \backslash ([0,1] \times \{0\})$ in der Spurtopologie von Ω ist.

c) Wir verwenden die Darstellung von ∇u aus b). Aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von ∇u auf $\overline{B(0,r_0)}$ bzw. v_r auf $[0,r_0] \times [0,2\pi]$ für alle $r_0 \in (0,1)$ folgt mit der Greenschen Formel sowie dem Transformationssatz

$$
\begin{aligned}
\int_{B(0,r_0)} |\nabla u(x)|^2 \mathrm{d}x &= -\int_{B(0,r_0)} \triangle u(x) \cdot u(x) \mathrm{d}x + \int_{\partial B(0,r_0)} \langle \nabla u(x), n(x) \rangle u(x) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} \cos\varphi v_r - \frac{1}{r_0} \sin\varphi v_\varphi \\ \sin\varphi v_r + \frac{1}{r_0} \cos\varphi v_\varphi \end{pmatrix} (r_0, \varphi), \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \right\rangle v(r_0,\varphi) \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} v(r_0,\varphi) v_r(r_0,\varphi) \mathrm{d}\varphi \\
&= \left\langle \sum_{n=3}^{\infty} \frac{r_0^{n!}\sin(n!\varphi)}{n^2}, \sum_{n=3}^{\infty} n! \frac{r_0^{n!-1}\sin(n!\varphi)}{n^2} \right\rangle_{L^2((0,2\pi))} \\
&= \tfrac{2}{\pi} \sum_{n=3}^{\infty} r_0^{2n!-1} \tfrac{n!}{n^4} \to \infty \text{ für } r_0 \to 1,
\end{aligned}
$$

wobei letztere Konvergenz mit dem Lemma von Fatou folgt. Damit folgt aber wegen der Monotonie des Lebesgue-Integrals

$$
\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \mathrm{d}x \geq \lim_{r_0 \to 1} \int_{B(0,r_0)} |\nabla u(x)|^2 \mathrm{d}x = \infty.
$$

□