Aufgabe 5.1. Sei $T > 0$ und $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Wir betrachten die inhomogene Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= f|_{(0,T)\times\mathbb{R}} \text{ in } (0,T) \times \mathbb{R}, \\ u(0,\cdot) &\equiv 0. \end{aligned} \tag{1}$$

a) Leiten Sie mittels Fouriertransformation eine Darstellungsformel für die Lösung u der Gleichung (1) her.

Hinweis: Verwenden Sie das Duhamelsche Prinzip (Variation der Konstanten) im Frequenzbereich.

b) Welche reguläre Distribution kommt dabei als Grundlösung für den vorliegenden Differentialoperator $L := \partial_t - \partial_{xx}$ in Frage? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung

a) Zunächst gehen wir formal vor. Wir wenden die Fouriertransformation auf Gleichung (1) an und finden

$$\begin{aligned} \hat{u}_t(t,\xi) + \xi^2 \hat{u}(t,\xi) &= \hat{f}(t,\xi) \text{ für } (t,\xi) \in (0,T) \times \mathbb{R}, \\ \hat{u}(0,\xi) &= 0 \text{ für } \xi \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Damit bekommen wir für jedes feste $\xi \in \mathbb{R}$ eine gewöhnliche Differentialgleichung bzgl. t, welche nach Analysis 3 durch die glatte Funktion

$$\hat{u}(t,\xi) = \int_0^t e^{-\xi^2(t-s)} \hat{f}(s,\xi) \mathrm{d}s \text{ für } s \geq 0$$

eindeutig lösbar ist. Ferner folgt für $(t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} u(t,x) = (\mathcal{F}^{-1}\hat{u}(t,\cdot))(x) &= \tfrac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \int_0^t e^{-\xi^2(t-s)} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi y} f(t,y) \mathrm{d}y \mathrm{d}s \mathrm{d}\xi \\ &= \tfrac{1}{2\pi} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{i(x-y)\xi - (t-s)\xi^2} \mathrm{d}\xi \right) f(t,y) \mathrm{d}y \mathrm{d}s \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} K(t-s,x,y) f(s,y) \mathrm{d}y \mathrm{d}s, \end{aligned}$$

wobei wir Integrationsprozesse formal vertauscht und die explizite Darstellung des Wärmeleitungskerns

$$K(t,x,y) = \tfrac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}$$

aus der Vorlesung benutzt haben.

Da $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ gilt, dürfen wir von $f, f_t, f_{xx} \in \mathcal{C}^0\big(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\big)$ sowie $\operatorname{supp} f \Subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ausgehen. Analog zu Satz 23.7 folgt:

1. $u, \partial_t u, \partial_{xx} u \in \mathcal{C}^0((0,\infty) \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. $u_t - u_{xx} = f$ in $(0,\infty) \times \mathbb{R}$ (s. auch Beweis zu b)).
3. $\lim\limits_{t \to 0} u(t,x) = 0$ lokal gleichmäßig bzgl. x (da f gleichmäßig stetig).

b) Wir definieren

$$\Phi(t,x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ 0, & t \leq 0, x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

und zeigen, dass Φ eine reguläre Distribution erzeugt, welche eine Fundamentallösung von (1) ist. Offensichtlich ist $\Phi \in \mathcal{C}^\infty((\mathbb{R}\times\mathbb{R})\setminus\{(0,0)^T\}, \mathbb{R})$. Sei $K \subset [-T,T]\times[-R,R]$ ein Kompaktum. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_K |\Phi(t,x)| \mathrm{d}(t,x) &\leq \int_0^T \int_{-R}^R \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leq \int_0^T \int_{-R}^R \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &= 2R \int_0^T \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \mathrm{d}t = \frac{2R}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t}\Big|_{t=0}^{t=T} = \frac{2R\sqrt{T}}{\sqrt{\pi}} < \infty.\end{aligned}$$

Also ist $\Phi \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. Nach Vorlesung wissen wir außerdem, dass $(\partial_t - \partial_{xx})\Phi = 0$ in $(\mathbb{R}\times\mathbb{R})\setminus\{(0,0)^T\}$ gilt.

Ferner erhalten wir für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ und alle Zylinder $Q_{T,R} := [-T,T]\times[-R,R]$

$$\begin{aligned}(\partial_t - \partial_{xx})[\Phi](\varphi) &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \Phi \cdot (-\partial_t - \partial_{xx})\varphi \mathrm{d}(t,x) \\ &= -\int_{Q_{T,R}} \Phi \cdot (\partial_t + \partial_{xx})\varphi \mathrm{d}(t,x) - \int_{(\mathbb{R}\times\mathbb{R})\setminus Q_{T,R}} \Phi \cdot (\partial_t + \partial_{xx})\varphi \mathrm{d}(t,x) \\ &= -\int_{Q_{T,R}} \Phi \cdot (\partial_t + \partial_{xx})\varphi \mathrm{d}(t,x) + \int_{(\mathbb{R}\times\mathbb{R})\setminus Q_{T,R}} (\partial_t - \partial_{xx})\Phi \cdot \varphi \mathrm{d}(t,x) + \\ &\quad \int_{-R}^R \Phi\cdot\varphi \,\mathrm{d}x\Big|_{t=-T}^{t=T} - \int_{-T}^T (\Phi\partial_x\varphi - \partial_x\Phi\varphi)\Big|_{x=-R}^{x=R} \mathrm{d}t \\ &\to \varphi(0,0) \text{ für } T\to 0, R\to\infty,\end{aligned}$$

denn

$$\begin{aligned}\int_{-R}^R \Phi(t,x)\varphi(t,x)\mathrm{d}x\Big|_{t=-T}^{t=T} - \varphi(0,0) &= \int_{-R}^R \Phi(T,x)\varphi(T,x)\mathrm{d}x - \varphi(0,0) \\ &= \int_{-R}^R \Phi(t,x)(\varphi(t,x) - \varphi(0,0))\mathrm{d}x \to 0 \text{ für } T\to 0, R\to\infty.\end{aligned}$$

Also ist $(\partial_t - \partial_{xx})[\Phi] = \delta_{(0,0)}$.

$\square$

Aufgabe 5.4 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand Γ, wobei $n(x)$ den äußeren Einheitsnormalenvektor an Ω in $x \in \Gamma$ bezeichnet. Ferner gelte $\Gamma_1 = \bar{\Gamma}_0\dot{\cup}\bar{\Gamma}_1$, wobei Γ_0, Γ_1 relativ offen in Γ sind. Seien $\rho, c_\rho, \lambda, \mu, k, \alpha, \theta_0 > 0$. Die Thermoelastizitätsgleichungen für ein elastisch und thermisch isotropes und homogenes Medium, welches im Referenzzustand das Gebiet Ω belegt, lauten

$$\begin{aligned}\rho u_{tt} - \mu\triangle u - (\lambda+\mu)\nabla \mathrm{div} u + k\alpha\nabla\theta &= 0 \text{ in } (0,\infty)\times\Omega, \\ \rho c_\rho \theta_t - k\triangle\theta + k\alpha\theta_0 \mathrm{div} u_t &= 0 \text{ in } (0,\infty)\times\Omega, \\ u(t,\cdot) = 0, \quad \theta(t,\cdot) &= 0 \text{ in } (0,\infty)\times\Gamma_0, \\ -\mu\nabla u(t,\cdot)n - (\mu+\lambda)n\mathrm{div} u(t,\cdot) + k\alpha\theta(t,\cdot)n = 0, \quad \frac{\partial\theta(t,\cdot)}{\partial n} &= 0 \text{ in } (0,\infty)\times\Gamma_1, \\ u(0,\cdot) = u^0, \quad u_t(0,\cdot) = u^1, \quad \theta(0,\cdot) &= \theta^0 \text{ in } \Omega,\end{aligned}$$

wobei u^0, u^1, θ^0 vorgegebene Funktionen sind und ∇u die Jacobi-Matrix von u bzgl. der x-Variablen bezeichnet. Es existiere eine Lösung

$$(u,\theta) \in \mathcal{C}^0\big([0,\infty)\times\bar{\Omega}, \mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$$

mit $\nabla u, \nabla u_t \in \mathcal{C}^0([0,\infty)\times\bar{\Omega}, \mathbb{R}^{d\times d})$, $\nabla^2 u \in \mathcal{C}^0([0,\infty)\times\bar{\Omega}, \mathbb{R}^{d\times d\times d})$, $\nabla^2\theta \in \mathcal{C}^0([0,\infty)\times\bar{\Omega}, \mathbb{R}^{d\times d})$. Es bezeichne

$$\sigma := \mu\nabla u + (\lambda+\mu)\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{d\times d}}\mathrm{div} u$$

den Spannungstensor.

a) Definieren Sie $V := (\sigma, u_t, \theta)^T$ sowie

$$\mathcal{X} := \big(\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})\big)^{d\times d} \times \big(\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})\big)^{d} \times \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$$

und bestimmen Sie einen Differentialoperator $\mathcal{A}\colon D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ und eine Funktion $V^0 \in \mathcal{X}$ so, dass

$$\begin{aligned} \partial_t V &= \mathcal{A}V \text{ in } (0,\infty)\times\Omega, \\ V(0,\cdot) &= V^0 \text{ in } \Omega \end{aligned}$$

gilt.

Hinweis: Die Randbedingungen sollen in den Definitionsbereich $D(\mathcal{A})$ von $\mathcal{A}$ eingebaut werden.

b) Zeigen Sie, dass die natürliche Energie

$$E(t) := \theta_0 \int_\Omega \left(\rho|u_t(t,x)|^2 + \mu\sum_{i=1}^d |\nabla u_i(t,x)|^2 + (\lambda+\mu)|\mathrm{div} u(t,x)|^2 + \tfrac{\rho c_\rho}{\theta_0}\theta^2(t,x) \right) \mathrm{d}x$$

monoton fallend ist.

Lösung

a) Es folgt

$$\mathcal{A} := \mathrm{diag}(1,\rho,\rho c_\rho)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \mu\nabla + (\lambda+\mu)\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{d\times d}}\mathrm{div} & 0 \\ \mathrm{div} & 0 & -k\alpha\nabla \\ 0 & -k\alpha\theta_0\mathrm{div} & k\triangle \end{pmatrix}$$

sowie

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}) = \Big\{ V \in \big(\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})\big)^{d\times d} \times \big(\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})\big)^{d} \times \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}) \,|\, & V = ((V^1_{ij})_{i,j=1,\ldots,d}, (V^2_i)_{i=1,\ldots,d}, V^3), \\ & V^2 = 0, V^3 = 0 \text{ in } \Gamma_0, \\ & V^1 n + k\alpha V^3 n = 0, \tfrac{\partial V^3}{\partial n} = 0 \text{ in } \Gamma_1 \Big\}. \end{aligned}$$

Hierbei ist für $\sigma \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^{d\times d})$

$$\mathrm{div}\sigma = \left(\sum_{j=1}^d \partial_j\sigma_{j1}, \ldots, \sum_{j=1}^d \partial_j\sigma_{ji}, \ldots, \sum_{j=1}^d \partial_j\sigma_{jd} \right)^T.$$

Ferner gilt

$$V^0 = \begin{pmatrix} \mu\nabla u^0 + (\lambda+\mu)\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{d\times d}}\mathrm{div} u^0 \\ u^1 \\ \theta^0 \end{pmatrix}.$$

b) Wegen der Glattheit der Lösung auf $[0,\infty)\times\bar\Omega$ gelten die partiellen Differentialgleichungen in $[0,\infty)\times\bar\Omega$, die Randbedingungen in $[0,\infty)\times\Gamma$ und die Anfangsbedingungen in $\bar\Omega$, weshalb die Unbekannten und deren Ableitungen komponentenweise in $L^2(\Omega)$ liegen. Multipliziert man die erste Gleichung skalar in $(L^2(\Omega))^d$ mit $\theta_0 u_t$ bzw. die zweite Gleichung skalar in $L^2(\Omega)$ mit θ und, so folgt nach Aufaddieren mit partieller Integration

$$0=\theta_0\int_\Omega(\rho u_{tt}u_t-\mu\triangle u u_t-(\lambda+\mu)\nabla\mathrm{div}u u_t+k\alpha\nabla\theta u_t)\mathrm{d}x$$
$$+\int_\Omega(\rho c_\rho\theta_t\theta-k\triangle\theta\theta+k\alpha\theta_0\mathrm{div}u_t\theta)\mathrm{d}x=$$
$$+\tfrac{\theta_0}{2}\partial_t\int_\Omega\Bigg(\rho|u_t(t,x)|^2+\mu\sum_{i=1}^d|\nabla u_i(t,x)|^2$$
$$+(\lambda+\mu)|\mathrm{div}u(t,x)|^2+\tfrac{\rho c_\rho}{\theta_0}\theta^2(t,x)\Bigg)\mathrm{d}x+k\int_\Omega|\nabla\theta|^2\mathrm{d}x,$$

wobei wir Grenzprozesse aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit der Integranden (auf jedem Kompaktum $[0,T]\times\bar\Omega$) vertauschen durften. Daraus folgt

$$\partial_t E(t)\le-2k\int_\Omega|\nabla\theta|^2\mathrm{d}x\le 0 \text{ für } t\ge 0,$$

weshalb E monoton fallend ist.

$\square$