

Beispiel (Akustische Wellen im Bodensee): Wir betrachten ein zweidimensionales Modell vom Bodensee zentriert um sein Baryzentrum¹ und parametrisiert durch ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

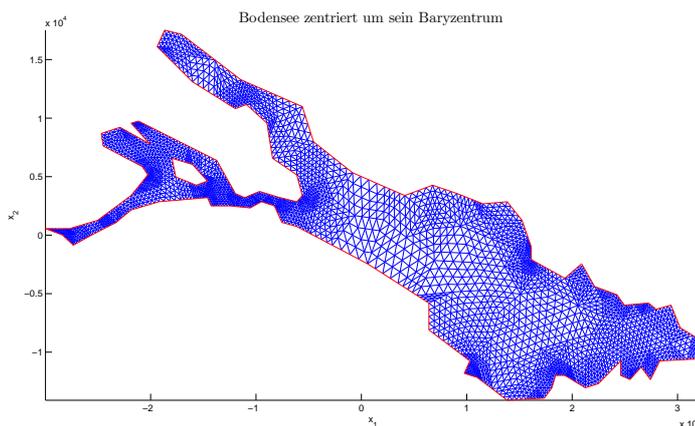


Abbildung 1: Triangulierung Ω_h von Ω

Mit $p: [0, \infty) \times \bar{\Omega} \rightarrow [0, \infty)$ sei der akustische Druck (Partikelgeschwindigkeit) in $\bar{\Omega}$ bezeichnet. Unter der Annahme, dass die Wellengeschwindigkeit konstant ist, d.h., es handelt sich um eine dispersionslose Welle – sogenannte Kelvinwelle, muss die Funktion p laut [1] der Wellengleichung

$$p_{tt} - c^2 \Delta p = 0 \tag{1}$$

genügen, wobei hier $c = 1463 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$ die Schallgeschwindigkeit im (tiefen) Süßwasser bezeichnet.

Nun wollen wir folgende Situation physikalisch modellieren: Es sei in der Nähe von Bregenz² eine Tiefwasserexplosion passiert. Wie entwickelt sich dann der akustische Druck über die Zeit t von 0 bis 40 [s]?

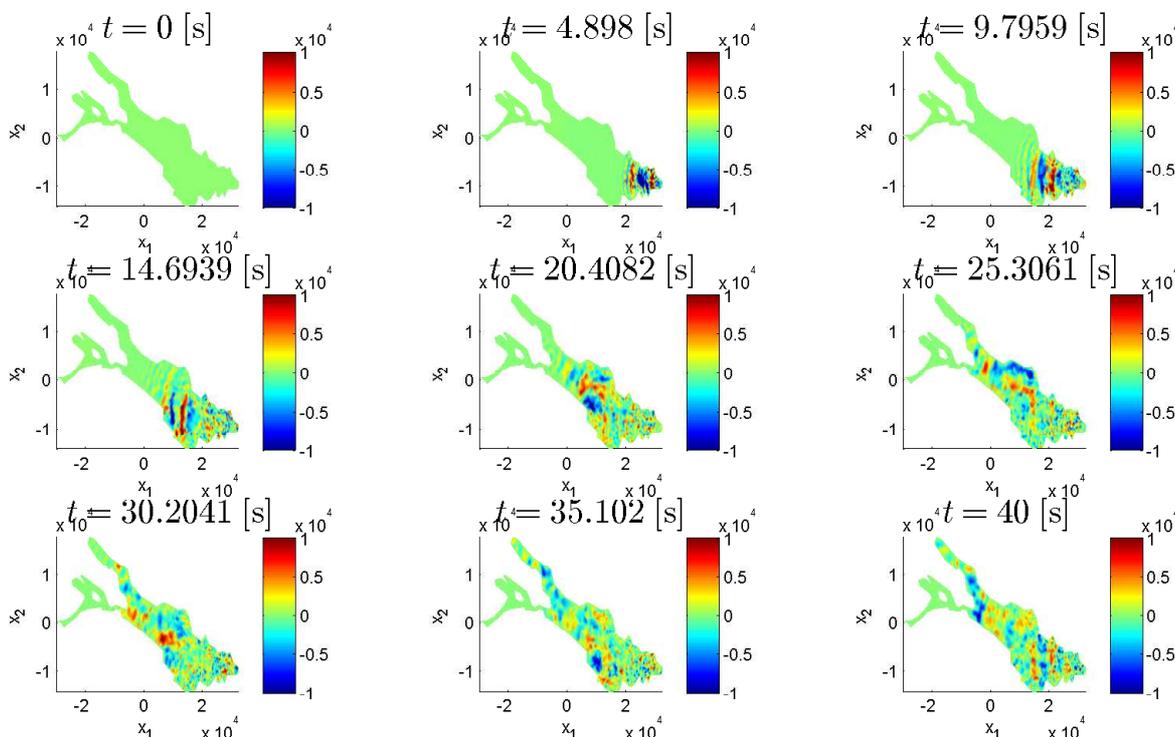


Abbildung 2: Zeitliche Entwicklung von p

Als Randbedingungen schreiben wir

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \text{ in } (0, \infty) \times \partial\Omega$$

¹griech. für „Schwerezentrum“: βαρύσ - schwer, κέτρον - Dorn, Zirkelspitze, Kreismitte.

²Koordinaten: 47°30' N, 9°45' O.

vor, während die Anfangsbedingungen durch

$$u(0, \cdot) = 0 \text{ in } \Omega, \quad u_t(0, \cdot) = \delta_{(x_0, y_0)} \text{ in } \Omega \quad (\text{eigentlich in } \mathcal{D}'(\Omega))$$

gegeben sind, wobei $x_0 = 29000$ [m], $y_0 = 9000$ [m] den Koordinaten von Bregenz entsprechen. Numerisch wird $\delta_{(x_0, y_0)}$ nachstehend als $10^6 \chi_\Delta$, $\Delta := B((x_0, y_0), 100)$, modelliert.

Bei der Vorgabe solcher irregulären Daten darf man natürlich von keiner glatten Lösung ausgehen. Es lässt sich aber mit Hilfe der Halbgruppentheorie unter Verwendung der Extrapolationsmethoden zeigen, dass es in diesem Fall eine eindeutige Lösung

$$p \in \mathcal{C}^2([0, \infty), \overline{L^2(\Omega)})^{(1-\Delta_N)^{-1} \cdot \|_{L^2(\Omega)}} \cap \mathcal{C}^1([0, \infty), (H_N^1(\Omega))') \cap \mathcal{C}^0([0, \infty), L^2(\Omega)) \quad (2)$$

gibt, wobei

$$H_N^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) \mid \langle \nabla u, \varphi \rangle_{(L^2(\Omega))^2} = -\langle u, \operatorname{div} \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} \text{ für alle } \varphi \in (\mathcal{C}^\infty(\Omega))^2\}$$

die Neumannschen Randbedingungen verallgemeinert und

$$D(\Delta_N) := \{u \in H_N^1(\Omega) \mid \Delta u \in L^2(\Omega)\}$$

den Definitionsbereich des Neumann-Laplaceoperators Δ_N darstellt.

Die in der Gleichung (2) gegebene Lösung p wird nun numerisch mit Hilfe eines Finite-Elemente-Verfahrens bzgl. der Ortsvariablen sowie eines Zeitintegrators vom Runge & Kutta-Typ aus der **pdetool** von **Matlab** berechnet und in der Abbildung 2 graphisch dargestellt.

Abschließend wird noch der akustische Druck zum Zeitpunkt $t^* = 18,78$ [s] geplottet, als die Welle Konstanz³ erreicht. Da die Luftlinie Konstanz–Bregenz ca. 46,58 km beträgt, würde die Daumenregel eine abweichende Schätzung

$$\hat{t} = \frac{465800}{1463} \approx 31.84 \text{ [s]}$$

liefern. Für bessere Konsistenz mit diesem theoretischen Wert sollten viel feinere Diskretisierungen verwendet werden.

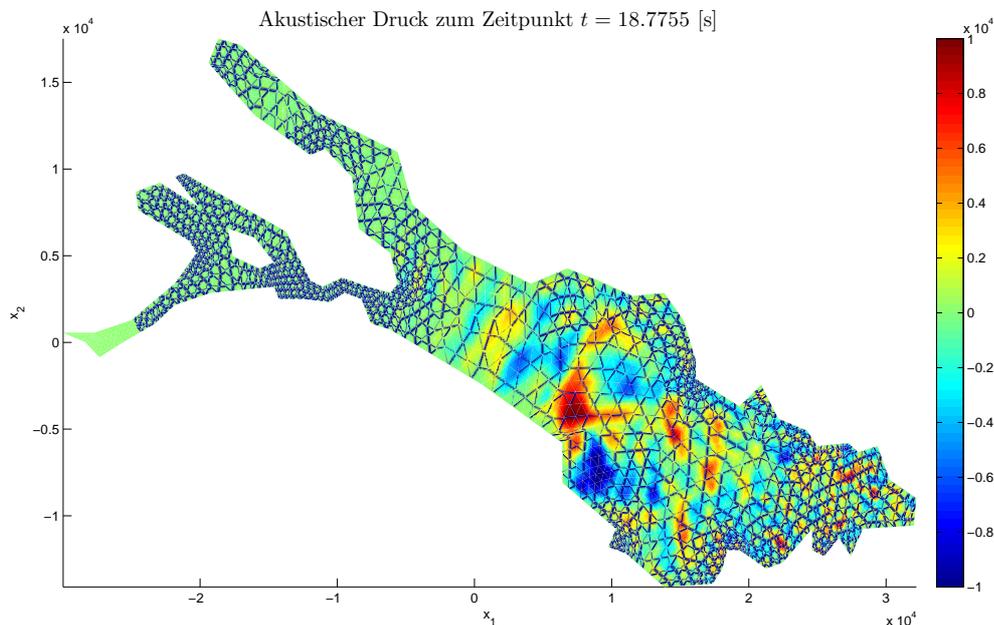


Abbildung 3: Plot von $p(18.78, \cdot)$

Literatur

- [1] Feynman, R. Lectures in Physics, Vol. 1, Addison Publishing Company, Addison (1969)

³Koordinaten: 47°40' N, 9°11' O.

Beispiel⁴ (Echolot):

Das Echolot ist ein in der Schifffahrt verwendetes Gerät zur elektroakustischen Messung von Wassertiefen (Lotung). Gemessen wird die Zeit, die zwischen der Aussendung eines Schallimpulses (Wasserschall) und der Ankunft der vom Gewässerboden reflektierten Schallwellen verstreicht.

Das Echolot wurde in den Jahren des Ersten Weltkriegs in verschiedenen Staaten gleichzeitig und weitgehend unabhängig voneinander entwickelt. In Deutschland gelang dem Physiker Alexander Behm der Durchbruch mit seinen Reichspatenten Nr. 310690 vom 7. Januar 1916 und Nr. 367202 vom 1. Juni 1920. Zur wirtschaftlichen Verwertung seiner Erfindung gründete er 1920 in Kiel die Behm-Echolot-Gesellschaft.

Das Echolot sendet über einen Geber ein Schallsignal nach unten. Dort wird das Signal vom Gewässerboden, aber auch Schiffswracks oder Fischeschwärmen, reflektiert. Der reflektierte Impuls wird am Schiff empfangen. Aus der Laufzeit kann die Wassertiefe berechnet werden.

Die meisten Echolote verwenden Impulse mit einer Frequenz im Bereich zwischen 50 und 200 kHz (Ultraschall mit einer Wellenlänge von 1500 m bis 6000 m). Ein Ultraschallgeber (meist ein Piezolautesprecher) im Schiffsboden oder am Heck strahlt Impulse aus. Die Schallwellen werden am Gewässerboden reflektiert und vom Schallwandler empfangen. Aus der Laufzeit der Wellen und der Ausbreitungsgeschwindigkeit wird die Tiefe ermittelt.

Die Zahl der Impulse pro Sekunde liegt zwischen etwa 5 und 40. Die Impulse dauern nur wenige Millisekunden, damit das Echolot dazwischen genügend Zeit hat, die reflektierten Impulse zu empfangen. Bei großen Wassertiefen müssen die Impulse wegen der längeren Laufzeit weiter auseinander liegen.

Der Öffnungswinkel des Messstrahls liegt meistens zwischen 5° und 20° (An dieser Grenze ist nur noch die Hälfte der Signalleistung von der Mitte messbar). Dadurch ergibt sich am Boden ein flächiger Messbereich, dessen Durchmesser proportional zur Tiefe zunimmt. Je nach Krängung des Schiffes, aber auch bei nicht senkrechter Montage des Gebers, entstehen durch schräge Messungen zu große Laufzeitwerte und falsche (zu große) Tiefen.

Im Idealfall entspricht das erste Echo der gesuchten Tiefe. Bei geneigtem bzw. unregelmäßigem Untergrund oder bei Schlick und Schlamm entstehen Messfehler und sind Korrekturen notwendig. Die Beschaffenheit des Untergrunds kann durch die Verwendung von zwei Frequenzen bestimmt werden. Die üblichen 100–200 kHz werden schon an Schichten geringer Dichte reflektiert, die tiefer eindringende niedrige Frequenz von 15 bis 50 kHz (Wellenlänge 3 cm bis 10 cm) hingegen erst an festeren Schichten.

Der Tiefenmessbereich variiert je nach Sendeleistung und Störgeräuschen. Einfache Geräte mit einer Sendeleistung zwischen 100 und 1000 Watt erreichen meist mehr als 100 Meter. Für größere Tiefen wird mehr Sendeleistung eingesetzt. Niedrigen Frequenzen, beispielsweise 50 kHz, werden im Wasser weniger gedämpft und reichen tiefer als hohe Frequenzen. Gedämpft wird der Strahl auch wenn der Geber im Schiffsinnen montiert ist und der Strahl erst die Bordwand durchdringen muss. Eine starke Dämpfung wird durch Luft erzeugt, beispielsweise, wenn der Rumpf in „Sandwichkonstruktion“ gefertigt ist, oder wenn unter dem Geber durch rauhe Oberflächen und das schnell vorbeiströmende Wasser Luftblasen entstehen (Kavitation). Luftblasen entstehen auch durch das Schraubenwasser vorbeifahrender Schiffe.

Für die Vermessung von Gewässersohlen, Flussmündungen und Flachküsten werden Fächerlotsysteme eingesetzt. Durch ein Strahlenbündel wird die Vermessung genauer und bei mehrfacher Überdeckung der gemessenen Streifen gut kontrollierbar.

Das Fächerecholot sendet nacheinander mehrere hundert Messstrahlen mit einem Öffnungswinkel von etwa 1,5°. Je nach Verteilung der Strahlen quer zur Fahrtrichtung entsteht ein Fächer von 120 bis 150° Breite. Die Fächeröffnung kann bei modernen Systemen dem Gewässerprofil, der Schiffsgeschwindigkeit und der Wassertiefe angepasst werden. Zur Vermessung von Hafenanlagen werden Fächerwinkel bis 210° verwendet. Der Fächer erfasst Streifen des Meeresbodens entlang des Schiffskurses. Je größer die Wassertiefe, desto breiter ist der erfasste Streifen. Fügt man mehrere überlappende Streifen zusammen, kann daraus ein digitales Geländemodell berechnet und schließlich eine topografische Karte erstellt werden.

Das Sedimentecholot verwendet niedrigere Schallfrequenzen im Bereich zwischen 0,5 und 6 kHz (Wellenlänge 3 m bis 25 cm) und dringt damit bis zu 100 m in den Meeresboden ein. Es liefert Geologen und Geophysikern Informationen über Härte und Beschaffenheit der Bodenschichten (Sedimente). Diese Bodenbeschaffenheit ist auch wichtig für den Wasserbau.

Die Echoortung ist ein eng verwandtes Verfahren, mit dem sich auch die Lage von Objekten, wie Schiffen oder Fischen, bestimmen lässt. Echoortung wird für die U-Boot-Suche und für die Minensuche eingesetzt (aktives Sonar-Verfahren). Hochauflösende Geräte dienen zur Wrack-Suche und zur Personen- und Leichen-Suche. Zahnwale und Fledermäuse verwenden die Echoortung zur Orientierung.

⁴Quelle: <http://de.wikipedia.org/wiki/Echolot>

Vereinzelt wird eine vergleichbare Methode auch in der Luftfahrt verwendet. Das Sonic Altimeter dient zur Höhenmessung von Flugzeugen über Grund. Das Autofokus-System einiger Fotoapparate arbeitet mit einem Ultraschall-Entfernungs-Messgerät. Mit dem Geoscanner werden Bodenveränderungen sichtbar gemacht. Auch der Mensch kann ein gewisses Gefühl für die Grösse von Räumen entwickeln, wenn diese etwas Halligkeit aufweisen, was besonders im Dunkeln oder von Blinden genutzt wird.