

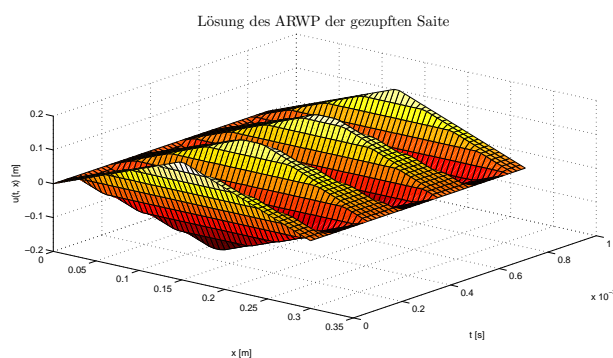
**Beispiel (Gezupfte Saite):** Betrachte eine goldene<sup>1</sup> Saite gleichmäßiger positiver Dicke der Länge  $L = 0.3$ [m], die an ihren beiden Rändern befestigt sei. Diese sei zum Anfangszeitpunkt  $t = 0$  an ihrem Mittelpunkt  $x = \frac{L}{2}$  gezupft, wodurch das Auslenkungsprofil  $u^0(x) = \frac{L}{2} - |x - \frac{L}{2}|$ ,  $x \in (0, L)$ , entsteht. Das Geschwindigkeitsprofil  $u^1$  sei konstant gleich Null. Nachstehend wird die mit Hilfe der d'Alembertschen Formel analytisch berechnete distributionelle Lösung  $u \in C_b^0([0, \infty) \times [0, L])$  mit

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \left( (-1)^{\lfloor \frac{x-ct}{L} \rfloor} \left( \frac{L}{2} - |x - ct - \lfloor \frac{x-ct}{L} \rfloor L - \frac{L}{2}| \right) + (-1)^{\lfloor \frac{x+ct}{L} \rfloor} \left( \frac{L}{2} - |x + ct - \lfloor \frac{x+ct}{L} \rfloor L - \frac{L}{2}| \right) \right)$$

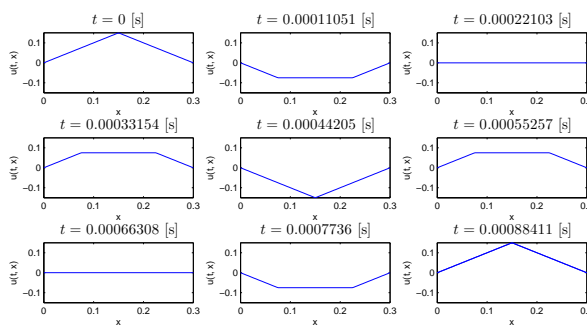
zum Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times (0, L), \\ u &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \{0, L\}, \\ u(0, \cdot) &= u^0 \text{ in } (0, L), \\ u_t(0, \cdot) &= u^1 \text{ in } (0, L) \end{aligned}$$

geplottet.



Lösungsfläche  $u$



Snapshots  $u(t, \cdot)$  für verschiedene Zeiten  $t$

Abbildung 1: Lösungsplots

Man kann leicht erkennen, dass es sich bei  $u$  (an festem  $x$ ) um eine periodische Schwingung mit der Amplitude  $\frac{L}{2} = 0.15$ [m] und der Frequenz  $\nu = \frac{c}{2L} = 3.39 \cdot 10^3$ [Hz] handelt.

**Beispiel (Gezupfte Saite mit innerer Dämpfung):** Im obigen Beispiel wäre es realistischer, die durch die innere Reibung entstehende Energiedissipation zu berücksichtigen. Führt man den sogenannten Dämpfungsfaktor  $\zeta$  ein<sup>2</sup>, so lautet die gedämpfte Wellengleichung

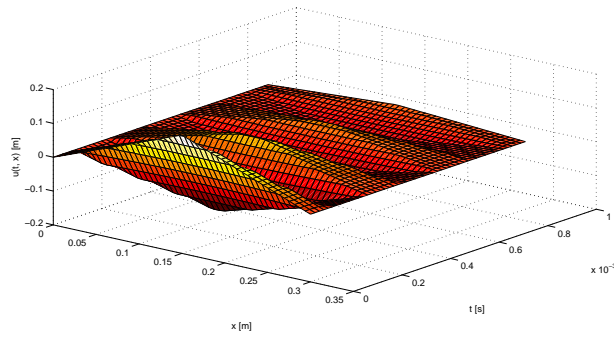
$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} + 2\zeta c u_t &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times (0, L), \\ u &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \{0, L\}, \\ u(0, \cdot) &= u^0 \text{ in } (0, L), \\ u_t(0, \cdot) &= u^1 \text{ in } (0, L). \end{aligned}$$

Um die Rolle der Dämpfung besser illustrieren zu können, haben wir  $\zeta := 1$  gewählt, was zwar bei Weitem die physikalische Konstante übersteigt, dafür aber die optimale Dämpfungsrate liefert. Nachstehend wird die numerische Lösung graphisch dargestellt, wobei wir zu deren Berechnung ein zentriertes Finite Differenzen Verfahren der Ordnung 2 im Ort und das Crank & Nicolson-Verfahren der Ordnung 2 in der Zeit mit gleichmäßigen Schrittweiten  $\Delta x = \frac{L}{1000}$  und  $\Delta t = \frac{6L}{10000c}$  in **Matlab** implementiert haben.

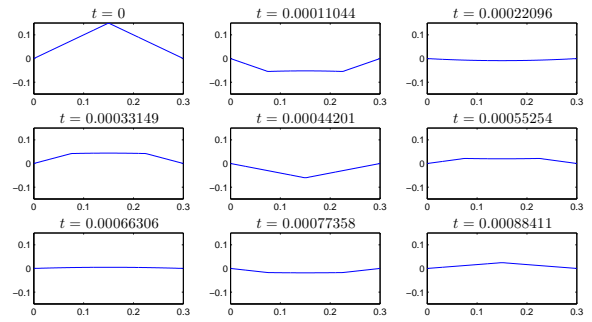
Es ist deutlich zu erkennen, dass die Auslenkung  $u(t, \cdot)$  für  $t \rightarrow \infty$  gleichmäßig bzgl.  $x \in [0, L]$  gegen Null konvergiert, was asymptotische Stabilität der Nulllösung bzgl.  $\|\cdot\|_{L^\infty((0,L))}$  bedeutet.

<sup>1</sup>Dichte:  $\rho = 19300[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}]$ , Elastizitätsmodul:  $E = 80 \cdot 10^9[\frac{\text{N}}{\text{m}^2}]$ , Massenflussgeschwindigkeit:  $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 2.04 \cdot 10^3[\frac{\text{kg}}{\text{s}}]$

<sup>2</sup>Für das Gold bei Temperatur 20° C ist  $\zeta = 3 \cdot 10^{-4}$ . Quelle: Tom Irvine, Damping properties of materials, Revision C (2004)



Lösungsfläche  $u$



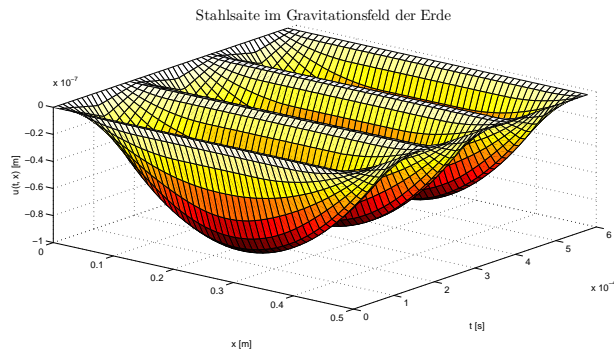
Snapshots  $u(t, \cdot)$  für verschiedene Zeiten  $t$

Abbildung 2: Lösungsplots

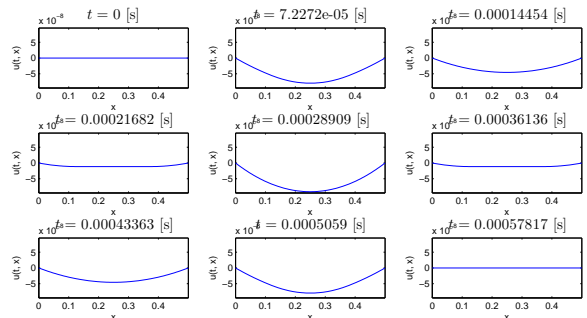
**Beispiel (Metallsaite im Gravitationsfeld der Erde):** Abschließend betrachten wir eine reibungsfreie Stahlsaite<sup>3</sup> gleichmäßiger positiver Dicke der Länge  $L = 0.5[\text{m}]$ , die an ihren beiden Randpunkten befestigt sei. Die Saite befinde sich zum Anfangszeitpunkt  $t = 0$  im spannungsfreien Zustand, d.h.,  $u^0 \equiv 0$ . Das Anfangsgeschwindigkeitsprofil sei auch gleich Null, d.h.,  $u^1 \equiv 0$ . Wird die Saite freigelassen, so versetzt das Gravitationsfeldes der Erde<sup>4</sup> die Saite in Schwingung. Die Auslenkung  $u$  genügt dabei der inhomogenen Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= g \text{ in } (0, \infty) \times (0, L), \\ u &= 0 \text{ in } (0, \infty) \times \{0, L\}, \\ u(0, \cdot) &= u^0 \text{ in } (0, L), \\ u_t(0, \cdot) &= u^1 \text{ in } (0, L). \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Fourierentwicklung bzgl. der Eigenfunktionenbasis des negativen Dirichlet-Laplaceoperators ergeben sich abzählbar viele gewöhnliche Differentialgleichungen zur Bestimmung der zeitabhängigen Fourierkoeffizienten. Auf der nachstehenden Abbildung wird die analytische Lösung geplottet.



Lösungsfläche  $u$



Snapshots  $u(t, \cdot)$  für verschiedene Zeiten  $t$

Abbildung 3: Lösungsplots

Auch hier entsteht eine periodische Schwingung, die an jedem festen Ort  $x$  die Frequenz  $\nu = \frac{c}{2L} = 5.19 \cdot 10^3[\text{Hz}]$  hat. Die Amplitude liegt dabei unterhalb von  $9.5 \cdot 10^{-8}[\text{m}]$ , also ca. 95 Nanometer (!). Dies bedeutet, dass das System für alle Zeiten sehr nah am stationären Zustand<sup>5</sup> bleibt und insbesondere stabil (aber nicht asymptotisch stabil) ist.

<sup>3</sup>Dichte:  $\rho = 7800[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}]$ , Elastizitätsmodul:  $E = 210 \cdot 10^9[\frac{\text{N}}{\text{m}^2}]$ , Massenflussgeschwindigkeit:  $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 5.19 \cdot 10^3[\frac{\text{kg}}{\text{s}}]$

<sup>4</sup>Schwerkraft oder Gravitation  $g = 9.81[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}]$

<sup>5</sup>Der stationäre Zustand  $\bar{u}$  ergibt sich als Lösung der elliptischen Gleichung  $c^2 \bar{u}'' = g$  in  $(0, L)$ ,  $\bar{u} = 0$  in  $\{0, L\}$ .