Aufgabe 7.3 Seien $d, n \in \mathbb{N}$ und sei $(x_k, y_k)_{k=1,\dots,n} \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$. Zu $\alpha, \beta > 0$ und $s := \lceil \frac{d}{4} \rceil$ definieren wir das Funktional

$$F(u) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (u(x_k) - y_k)^2 + \alpha \int_{\mathbb{R}^d} |\triangle^s u(x)|^2 \mathrm{d}x + \beta \int_{\mathbb{R}^d} u^2(x) \mathrm{d}x, \quad u \in H^{2s}(\mathbb{R}^d).$$

a) Beweisen Sie, dass F wohldefiniert ist.

Hinweis: Folgern Sie die Stetigkeit der Restriktion $u \mapsto u|_{\{x_1,\dots,x_n\}}$ aus dem Sobolevschen Einbettungssatz.

b) Zeigen Sie, dass F sein globales Minimum an einer Stelle $u^* \in H^{2s}(\mathbb{R}^d)$ annimmt.

c) Leiten Sie die schwache Formulierung des elliptischen Problems her, welchem u^* genügen muss.

Hinweis: Betrachten Sie die erste Variation bzw. die Gâteaux-Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} F(u + \varepsilon\varphi)|_{\varepsilon=0}$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, von F und setzen Sie diese gleich Null.

d) Wie lautet die starke Formulierung des elliptischen Problems aus c)?

Lösung

a) Unter Beachtung der Sobolevschen Einbettung

$$H^k(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow C_b^0(\mathbb{R}^d) \text{ für } k \geq \tfrac{d}{2}$$

folgt, dass die Restriktionsabbildung

$$\delta_{x_k} \colon H^{2s}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto u(x_k)$$

wohldefiniert ist. Daher ist auch die Abbildung

$$u \mapsto \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (u(x_k) - y_k)^2$$

in $H^{2s}(\mathbb{R}^d)$ wohldefiniert. Wegen $u \in H^{2s}(\mathbb{R}^d)$ gilt außerdem $\triangle^s u, u \in L^2(\mathbb{R}^d)$, weshalb auch beide Integrale endlich sind. Insgesamt folgt, dass F wohldefiniert ist.

b) Wir definieren für $u \in H^{2s}(\mathbb{R}^d)$

$$G(u) := \alpha \int_{\mathbb{R}^d} |\triangle^s u(x)|^2 \mathrm{d}x + \beta \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^2 \mathrm{d}x.$$

Mit Parsevalscher Gleichheit und den Eigenschaften der Fouriertransformation folgt, dass es zwei Konstanten $C_1, C_2 > 0$ so gibt, dass

$$C_1 \|u\|^2_{H^{2s}(\mathbb{R}^d)} \leq G(u) \leq C_2 \|u\|^2_{H^{2s}(\mathbb{R}^d)}$$

für alle u gilt, da die Polynome $\xi \mapsto \sum_{|a| \leq 2s} (-i)^{|a|} \xi^a$ und $\xi \mapsto (-1)^s \alpha |\xi|^{2s} + \beta$ äquivalent sind.

Desweiteren ist F nach unten beschränkt, denn

$$F(u) \geq 0 \text{ für alle } u \in H^{2s}(\mathbb{R}^d).$$

Damit existiert

$$\inf_{u \in H^{2s}(\mathbb{R}^d)} F(u) =: \gamma \geq 0.$$

Daher gibt es eine Folge $(u_k)_k \subset H^{2s}(\mathbb{R}^d)$ mit

$$F(u_k) \to \gamma \text{ für } k \to \infty.$$

Insbesondere ist dann $\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(u_k(x_i)-y_i)^2\right)_k$ beschränkt, weshalb es eine Teilfolge gibt, die wir wieder mit $(u_k)_k$ bezeichnen, die an den Stellen $x_1,\dots,x_n$ konvergiert. Insbesondere sind dann $(u_k(x_i))_k$, $i=1,\dots,n$, Cauchyfolgen. Daher reicht es, nur das Funktional G zu betrachten.

Mit der Parallelogrammgleichung folgt

$$2(G(u)+G(v)) = G(u+v) - G(u-v),$$

weshalb auch

$$G(u-v) = 2(G(u)+G(v)) - G(u-v) = 2(G(u)+G(v)) - 4G(\tfrac{1}{2}(u+v))$$

gilt. Wendet man nun diese Identität auf u_k und u_l an, so folgt

$$G(u_l - u_k) = 2G(u_k) + 2G(u_l) - 4G(\tfrac{1}{2}(u_k+u_l))$$

ergibt. Nun gilt nach der Definition von γ

$$G(\tfrac{1}{2}(u_k+u_l)) = F(\tfrac{1}{2}(u_k+u_l)) + o(1) \geq \gamma + o(1)$$

sowie

$$\begin{aligned}\|u_k - u_l\|^2_{H^{2s}(\mathbb{R}^d)} &\leq C_2 G(u_k-u_l) \leq 2C_2\big(2F(u_k)+2F(u_l)-4\gamma\big) + o(1)\\ &\leq 4C_2\gamma - 4C_2\gamma + o(1) \to 0 \text{ für } k,l\to\infty.\end{aligned}$$

Daher ist $(u_k)_k$ eine Cauchyfolge in $H^{2s}(\mathbb{R}^d)$. Also konvergiert $(u_k)_k$ gegen ein $u^* \in H^{2s}(\mathbb{R}^d)$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $F(u^*) = \gamma$ gilt. Aufgrund des Sobolevschen Satzes sowie der Äquivalenz von $\sqrt{G}$ zur H^{2s}-Norm ergibt sich die Stetigkeit von F. Es folgt also

$$\gamma \leftarrow F(u_k) \to F(u^*)$$

und daher $F(u^*) = \gamma$, d.h., u^* ist ein globales Minimum von F.

c) Sei $u \in H^{2s}(\mathbb{R}^d)$. Für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\varepsilon > 0$ gilt dann

$$\begin{aligned}F(u+\varepsilon\varphi) &= \tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u(x_k)+\varepsilon\varphi(x_k)-y_k)^2 + \alpha\int_{\mathbb{R}^d}|\triangle^s u(x)+\varepsilon\triangle\varphi(x)|^2\mathrm{d}x +\\ &\quad \beta\int_{\mathbb{R}^d}(u(x)+\varepsilon\varphi(x))^2\mathrm{d}x\\ &= \tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\big((u^2(x_k)-y_k)^2 + 2\varepsilon(u(x_k)-y_k)\varphi(x_k)+\varepsilon^2\varphi^2(x_k)\big)+\\ &\quad \alpha\int_{\mathbb{R}^d}\big(|\triangle^s u(x)|^2 + 2\varepsilon\triangle^s u(x)\cdot\triangle^s\varphi(x)+\varepsilon^2|\triangle^s\varphi(x)|^2\big)\mathrm{d}x+\\ &\quad \beta\int_{\mathbb{R}^d}\big(u^2(x)+2\varepsilon u(x)\varphi(x)+\varepsilon^2\varphi^2(x)\big)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

woraus sich

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}F(u+\varepsilon\varphi)|_{\varepsilon=0} = \tfrac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}(u(x_k)-y_k) + 2\alpha\int_{\mathbb{R}^d}\triangle^s u(x)\cdot\triangle^s\varphi(x)\mathrm{d}x + 2\beta\int_{\mathbb{R}^d}u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

ergibt. Damit muss $u^* \in H^{2s}(\mathbb{R}^d)$ die variationelle Gleichung

$$\tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u^*(x_k)-y_k)\varphi(x_k)+\alpha\int_{\mathbb{R}^d}\triangle^s u^*(x)\cdot\triangle^s\varphi(x)\mathrm{d}x+\beta\int_{\mathbb{R}^d}u^*(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=0$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ erfüllen.

d) Geht man formal von der Existenz einer klassisch differenzierbaren Lösung $u^* \in \mathcal{C}^{2s}(\mathbb{R}^d)$ aus, so folgert man für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ mit partieller Integration (wobei man die Integrale auf $B(0,R)$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subset B(0,R)$ einschränkt)

$$\tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u^*(x_k)-y_k)\varphi(x_k)+\alpha\int_{\mathbb{R}^d}\triangle^{2s} u^*(x)\cdot\varphi(x)\mathrm{d}x+\beta\int_{\mathbb{R}^d}u^*(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=0.$$

Da nun der Raum

$$\{u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)\,|\,\operatorname{supp}\varphi \cap \{x_1,\dots,x_n\}=\varnothing\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$$

dicht in $L^2(\mathbb{R}^d)$ liegt, folgt mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung (Lemma von du Bois-Reymond) die Gültigkeit der starken Gleichung

$$\alpha\triangle^{2s}u^*+\beta u^*=0 \text{ in } \mathbb{R}^d\backslash\{x_1,\dots,x_n\}$$

bzw. der distributionellen Gleichung

$$\alpha\triangle^{2s}u^*+\beta u^*+\tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u^*(x_k)\delta_{x_k}=\tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k\delta_{x_k} \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d).$$

Bemerkung 1: Leicht sieht man, dass auch schwache Lösungen $u^* \in H^{2s}(\mathbb{R}^d)$ die obige distributionelle Gleichung erfüllen. ,,Überraschenderweise" muss nach dem Satz von Weyl sogar $u^* \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d\backslash\{x_1,\dots,x_n\})$ gelten, weshalb auch die starke Gleichung in $\mathbb{R}^d\backslash\{x_1,\dots,x_n\}$ erfüllt sein muss.

Bemerkung 2: Aus Stetigkeitsgründen muss eine klassische Lösung $u^* \in \mathcal{C}^{2s}(\mathbb{R}^d)$ sogar

$$\alpha\triangle^{2s}u^*+\beta u^*=0 \text{ in } \mathbb{R}^d, \quad u^*(x_k)=y_k \text{ für } k=1,\dots,n$$

erfüllen. Setzt man sogar $u^* \in \mathcal{C}^{2s}(\mathbb{R}^d)\cap H^{2s}(\mathbb{R}^d)$ voraus, so muss zwingend $u^* \equiv 0$, $y_1=y_2=\dots=y_n=0$ gelten.

$\square$