Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dr. Michael Pokojovy

21. Oktober 2013

Theorie und Numerik Partieller Differentialgleichungen
1. Übungsblatt

Aufgabe 1.1 (4 Punkte)

Geben Sie $m, l, n \in \mathbb{N}$ und die Funktion $F\colon \big(x, (y_\alpha)_{0 \le |\alpha| \le k}\big) \mapsto F\big(x, (y_\alpha)_{0 \le |\alpha| \le k}\big)$ aus der Vorlesung für folgende Differentialgleichungen an:

a) Korteweg & de Vries-Gleichung:
$\varphi_t + \varphi_{xxx} + 6\,\varphi\,\varphi_x = 0$ für $\varphi\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

b) Monge & Ampère-Gleichung:
$\det(\nabla^2 u) = K(\cdot)(1 + |\nabla u|^2)^2$ für $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ($K \in \mathcal{C}^0\big(\mathbb{R}, [0, \infty)\big)$ vorgegeben),

c) Plattengleichung nach Kirchhoff & Love:
$w_{tt} - \triangle w_{tt} + \triangle f(\triangle w) = 0$ für $w\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ($d \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^2\big(\mathbb{R}, \mathbb{R}\big)$ vorgegeben),

d) Lamé-Gleichungen:
$-\mu\triangle u - (\lambda + \mu)\nabla \mathrm{div} u = 0$ für $u\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}$, $\lambda, \mu > 0$ vorgegeben).

Aufgabe 1.2 (4 Punkte)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet, $T > 0$. Ferner sei $u\colon [0, T] \times \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

i) $u \in \mathcal{C}^0\big([0, T] \times \bar{\Omega}\big)$, *ii)* $\big(t \mapsto u(t, \cdot)\big) \in \mathcal{C}^0\big([0, T], \mathcal{C}^0\big(\bar{\Omega}\big)\big)$.

Aufgabe 1.3 (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand Γ. Die Funktionen $\theta\colon [0, \infty) \times \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$, $q\colon [0, \infty) \times \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ bezeichnen die Temperatur bzw. den Wärmefluss im Medium Ω. Mit $c, c_\rho, \lambda, \tau > 0$ werden die Stoffdichte, die Wärmedichte, die Wärmeleitfähigkeit und der Relaxationsparameter bezeichnet. Die relativistische Wärmeleitung nach Cattaneo wird dann durch das folgende System modelliert:

$$
\begin{aligned}
c c_\rho \partial_t \theta(t, x) + \mathrm{div} q(t, x) &= 0 \text{ für } (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega, \\
\tau \partial_t q(t, x) + q(t, x) + \lambda \nabla \theta(t, x) &= 0 \text{ für } (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega, \\
q(t, x) \cdot n(x) &= 0 \text{ für } (t, x) \in (0, \infty) \times \Gamma, \\
\theta(0, x) &= \theta^0(x) \text{ für } x \in \Omega, \\
q(0, x) &= q^0(x) \text{ für } x \in \Omega,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

wobei n den äußeren Einheitsnormalenvektor an Γ bezeichnet und θ^0, q^0 vorgegeben sind. Es existiere eine Lösung $(\theta, q) \in \mathcal{C}^2\big([0, \infty) \times \bar{\Omega}, \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3\big)$ zu (1). Beweisen Sie:

a) Es gilt $\int_\Omega \theta(t, x) \mathrm{d}x = \int_\Omega \theta^0(x) \mathrm{d}x$ für $t > 0$.
Hinweis: Leiten Sie eine gewöhnliche Differentialgleichung für $F(t) := \int_\Omega \theta(t, x) \mathrm{d}x$, $t \ge 0$, her.

b) Ist $\mathrm{rot}\, q^0 \equiv 0$, so gilt $\mathrm{rot}\, q(t, \cdot) \equiv 0$ für $t > 0$.

Abgabetermin: Montag, den 28. Oktober 2013, vor 12:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.