Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dr. Michael Pokojovy

28. Oktober 2013

# Theorie und Numerik Partieller Differentialgleichungen
## 2. Übungsblatt

**Aufgabe 2.1** (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet und sei $\Gamma \subset \Omega$ eine $(d-1)$-Fläche. Die Eikonalgleichung stellt das grundlegende Postulat der geometrischen Optik dar und beschreibt die Ausbreitung von Lichtstrahlen in einem Medium. Wird mit $\phi$ die die Strecke eines Lichtstrahls zwischen Ausgangs- und Endpunkt (sogenanntes „Eikonal") bezeichnet, so lautet die Eikonalgleichung

$$|\nabla\phi(x)| = n(x) \text{ für } x \in \Omega\backslash\Gamma, \quad \phi(x) = 0 \text{ auf } \Gamma, \tag{1}$$

wobei $n(x)$ den positiven Brechungsindex des $\Omega$ belegenden Mediums an der Stelle $x \in \Omega$ bezeichnet.

a) Sind klassische Lösungen $\phi \in \mathcal{C}^1(\Omega\backslash\Gamma, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R})$ eindeutig?

b) Bestimmen Sie eine klassische Lösung $\phi$ zu (1) für folgende Daten:

*i)* $\Omega := \mathbb{R}^3$, $\Gamma := \partial B(x_0, r)$ ($x_0 \in \mathbb{R}^3$, $r > 0$), $n \equiv 1$.

*ii)* $\Omega := \mathbb{R}^2$, $\Gamma := \{(x, \alpha x) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), $n \equiv 1$.

Hinweis: Wählen Sie z.B. $\phi(x) = \min\limits_{y\in\Gamma} |x - y|$.

c) Zeigen Sie, dass die eindimensionale Eikonalgleichung

$$|\phi'(x)| = n(x) \text{ für } x \in (a, b), \quad \phi(a) = \phi(b) = 0$$

keine Lösung $\phi \in \mathcal{C}^1\big((a, b), \mathbb{R}\big) \cap \mathcal{C}^0\big([a, b], \mathbb{R}\big)$ besitzt, wobei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $n \in \mathcal{C}^0\big([a, b], (0, \infty)\big)$ beliebig sind.

**Aufgabe 2.2** (4 Punkte)

Seien $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha_2 \neq 0$, $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Geben Sie die allgemeine Lösung für das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \alpha_1 u_x + \alpha_2 u_y &= \beta u + f \text{ in } \mathbb{R}^2, \\ u|_\Gamma &= u_0 \end{aligned} \tag{2}$$

an, wobei $\Gamma := \mathbb{R} \times \{0\}$.

**Aufgabe 2.3** (4 Punkte)

Finden Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u_x + u_y &= u^2 \text{ in } \mathbb{R}^2, \\ u(x, -x) &= x \text{ für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Welche Gestalt hat der maximale Definitionsbereich der Lösung?

**Aufgabe 2.4** (4 Punkte)

Bestimmen Sie in jedem Punkt des $\mathbb{R}^2$ den Typ der folgenden Differentialgleichungen:

*i)* $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x - u_y = 0,$

*ii)* $yu_{xx} + u_{yy} = 0.$

Abgabetermin: Montag, den 4. November 2013, vor 12:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.