Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dr. Michael Pokojovy

4. November 2013

Theorie und Numerik Partieller Differentialgleichungen
3. Übungsblatt

Aufgabe 3.1 (4 Punkte)

Es seien $\Omega := (0, l)$, $l > 0$, und $u^0 \in \mathcal{C}^2\big(\bar{\Omega}\big)$.

a) Finden Sie eine Lösung $u \in \mathcal{C}^0\big([0, \infty) \times \bar{\Omega}\big)$ mit $u_t, u_{xx} \in \mathcal{C}^0\big((0, \infty) \times \Omega\big)$ der Anfangs-randwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) &= 0 \text{ für } (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega, \\ u(t, x) &= 0 \text{ für } (t, x) \in (0, \infty) \times \partial\Omega, \\ u(0, x) &= u^0(x) \text{ für } x \in \Omega. \end{aligned}$$

Hinweis: Verwenden Sie den Separationsansatz und Fourierreihen.

b) Zeigen Sie, dass die Lösung u von u^0 stetig abhängt, indem Sie beweisen, dass es eine Konstante $C > 0$ so gibt, dass

$$\sup_{t \in [0, \infty)} \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|u^0\|_{L^2(\Omega)}$$

gilt.

Hinweis: Wenden Sie die Parselvalsche Gleichung auf die Lösungsdarstellung aus a) an.

c) Beweisen Sie für $t > 0$, dass $u(t, \cdot) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ gilt.

Aufgabe 3.2 (4 Punkte)

a) Beweisen Sie, dass die Funktion $g\colon \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2\pi} \ln(|x|)$, eine reguläre Distribution erzeugt, die eine Grundlösung des Laplaceoperators $\triangle$ im $\mathbb{R}^2$ ist.

b) Bestimmen Sie eine Grundlösung zum Laplaceoperator ∂_x^2 im $\mathbb{R}$ und begründen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 3.3 (4 Punkte)

Es bezeichnen $\mu \in (0, \frac{1}{2})$, $E > 0$ die Poissonzahl und den Youngschen Elastizitätsmodul.

a) Zeigen Sie, dass die Plattengleichung im $\mathbb{R}^3$ eine Grundlösung besitzt, indem Sie beweisen, dass ein $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ mit

$$\triangle^2 g = \delta_0$$

existiert. Es muss keine explizite Darstellung der Grundlösung hergeleitet werden!

Hinweis: Betrachten Sie das System $\left\{ \begin{array}{l} \triangle g = f, \\ \triangle f = \delta_0. \end{array} \right.$

b) Zeigen Sie dann für die in der Teilaufgabe a) gefundene Distribution g, dass die Abbildung

$$u_{ij} = \sum_{m=1}^{3} \Big(E\delta_{ij}\partial_m^2 g - \tfrac{E}{2(1-\nu)}\delta_{im}\partial_j\partial_m g \Big)$$

in $L\big(\mathcal{D}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^{3\times 3}), \mathbb{R}^{3\times 3}\big)$ liegt und eine Tensorgrundlösung des Operators der Elastostatik darstellt, d.h., u_{ij} genügt dem System

$$-\sum_{k=1}^{3} \big(\tfrac{E}{1-2\nu}\partial_k \partial_j u_{ik} + E\partial_k^2 u_{ik}\big) = \delta_0 \delta_{ij} \text{ für } i, j = 1, 2, 3.$$

HINWEIS: Rechnen Sie die Gleichheit komponentenweise nach.

Abgabetermin: Montag, den 11. November 2013, vor 12:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.