Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dr. Michael Pokojovy

11. November 2013

Theorie und Numerik Partieller Differentialgleichungen
4. Übungsblatt

Aufgabe 4.1 (4 Punkte)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet und $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$. Ferner seien $b \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^d)$, $a \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^{d\times d})$ mit $a(x) = (a(x))^T$ für alle $x \in \bar{\Omega}$ und es gebe ein $\kappa > 0$ so, dass $\inf\limits_{x\in\bar{\Omega}} \langle a(x)\xi, \xi\rangle \geq \kappa|\xi|^2$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$ gilt. Zeigen Sie für den Differentialoperator

$$(Lu)(x) := \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\partial_i\partial_j u(x) + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\partial_i u(x) \text{ für } x \in \Omega$$

die Gültigkeit folgender Aussagen:

a) Ist $Lu \geq 0$ in Ω, so gilt $\max\limits_{x\in\bar{\Omega}} u(x) = \max\limits_{x\in\partial\Omega} u(x)$.

b) Ist $Lu \leq 0$ in Ω, so gilt $\min\limits_{x\in\bar{\Omega}} u(x) = \min\limits_{x\in\partial\Omega} u(x)$.

Aufgabe 4.2 (4 Punkte)

Sei $\Omega := B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ und es seien mit

$$\begin{aligned} \Phi\colon (0,1)\times(0,2\pi) &\to \big(\Omega\backslash([0,1]\times\{0\})\big), & (r,\varphi) &\mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)),\\ \Psi\colon (0,2\pi) &\to \big(\partial\Omega\backslash\{(1,0)\}\big), & \varphi &\mapsto (\cos(\varphi), \sin(\varphi)), \end{aligned}$$

die zu den Polarkoordinaten gehörigen $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismen bezeichnet. Ferner seien die Funktionen $g\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}$, $v\colon [0,1]\times[0,2\pi] \to \mathbb{R}$ durch die Reihen

$$g(\varphi) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n!\varphi)}{n^2}, \quad v(r,\varphi) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n!}\sin(n!\varphi)}{n^2}$$

definiert. Beweisen Sie:

a) Die Funktion $g \circ \Psi^{-1}$ lässt sich eindeutig zu einem $f \in \mathcal{C}^0(\partial\Omega)$ fortsetzen.

b) Die Funktion $v \circ \Phi^{-1}$ lässt sich eindeutig zu einem $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ fortsetzen, welches die Randwertaufgabe

$$\triangle u = 0 \text{ in } \Omega, \quad u = f \text{ in } \partial\Omega$$

löst.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis davon ausgehen, dass für $w \in \mathcal{C}^2\big((0,1)\times(0,2\pi)\big)$

$$(\Phi^{-1} \circ (\triangle(w\circ\Phi))(r,\varphi) = w_{rr} + \tfrac{1}{r}w_r + \tfrac{w_{\varphi\varphi}}{r^2} \text{ für } (r,\varphi) \in (0,1)\times(0,2\pi)$$

gilt.

c) Es gilt: $\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \mathrm{d}x = \infty$.

Aufgabe 4.3 (4 Punkte)

Sei $u^0(x) := e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie eine Lösung u der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u - \partial_x^2 u &= 0 \text{ in } (0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0,\cdot) &= u^0 \text{ in } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4.4 (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand Γ. Weiter seien $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ lipschitzstetig und $u^0 \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ mit $u^0|_\Gamma \equiv 0$. Beweisen Sie, dass das semilineare Problem

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \triangle u + f(u) \text{ in } (0,\infty) \times \Omega, \\ u(t,\cdot) &= 0 \text{ in } (0,\infty) \times \Gamma, \\ u(0,\cdot) &= u^0 \text{ in } \Omega \end{aligned}$$

höchstens eine Lösung $u \in \mathcal{C}^0\big([0,\infty) \times \bar{\Omega}, \mathbb{R}\big)$ mit $\partial_t u \in \mathcal{C}^0\big([0,\infty) \times \Omega, \mathbb{R}\big)$ und $\nabla^2 u \in \mathcal{C}^0\big([0,\infty) \times \bar{\Omega}, \mathbb{R}^{d\times d}\big)$ besitzt.

Abgabetermin: Montag, den 18. November 2013, vor 12:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.