Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dr. Michael Pokojovy

18. November 2013

Theorie und Numerik Partieller Differentialgleichungen

5. Übungsblatt

Aufgabe 5.1 (4 Punkte)

Sei $T > 0$ und $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Wir betrachten die inhomogene Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= f|_{(0,T)\times\mathbb{R}} \text{ in } (0,T) \times \mathbb{R}, \\ u(0,\cdot) &\equiv 0. \end{aligned} \tag{1}$$

a) Leiten Sie mittels Fouriertransformation eine Darstellungsformel für die Lösung u der Gleichung (1) her.

Hinweis: Verwenden Sie das Duhamelsche Prinzip (Variation der Konstanten) im Frequenzbereich.

b) Welche reguläre Distribution kommt dabei als Grundlösung für den vorliegenden Differentialoperator $L := \partial_t - \partial_{xx}$ in Frage? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5.2 (4 Punkte)

Sei $u^0(x) := |x|^2$, $x \in \mathbb{R}^3$. Finden Sie eine Lösung $u \in \mathcal{C}^2\big(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3\big)$ des Cauchyproblems

$$\begin{aligned} u_{tt} - \triangle u &= 0 \text{ in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \\ u(0,\cdot) &= 0 \text{ in } \mathbb{R}^3, \\ u_t(0,\cdot) &= u^0 \text{ in } \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Hinweis: Beginnen Sie mit dem Ansatz $u(t,x) := v(t,|x|)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^3$, und betrachten Sie anschließend $w(t,s) := sv(t,s)$, $t \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$.

Aufgabe 5.3 (4 Punkte)

Seien $c, T > 0$. Ferner bilde der Operator Λ die Funktionen $(u^0, u^1) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ auf die Lösung $u \in \mathcal{C}^2([-T,T],\mathbb{R})$ des Cauchyproblems

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 \text{ in } [-T,T] \times \mathbb{R}, \\ u(0,\cdot) &= u^0 \text{ in } \mathbb{R}, \\ u_t(0,\cdot) &= u^1 \text{ in } \mathbb{R} \end{aligned}$$

ab. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Der Lösungsoperator $\Lambda\colon \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \times \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^2([-T,T]\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ ist wohldefiniert und linear.

b) Λ ist stetig, d.h., es existiert eine Konstante $C > 0$ so, dass

$$\|\Lambda(u^0,u^1)\|_{\mathcal{C}_b^0([-T,T]\times\mathbb{R},\mathbb{R})} \leq C\|(u^0,u^1)\|_{\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R},\mathbb{R})\times\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R},\mathbb{R})}$$

für alle $(u^0,u^1) \in \big(\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R},\mathbb{R})\big) \times \big(\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R},\mathbb{R})\big)$ gilt.

Aufgabe 5.4 (Freiwillig) (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand Γ, wobei $n(x)$ den äußeren Einheitsnormalenvektor an Ω in $x \in \Gamma$ bezeichnet. Ferner gelte $\Gamma_1 = \bar{\Gamma}_0 \dot{\cup} \bar{\Gamma}_1$, wobei Γ_0, Γ_1 relativ offen in Γ sind. Seien $\rho, c_\rho, \lambda, \mu, k, \alpha, \theta_0 > 0$. Die Thermoelastizitätsgleichungen für ein elastisch und thermisch isotropes und homogenes Medium, welches im Referenzzustand das Gebiet Ω belegt, lauten

$$\begin{aligned}
\rho u_{tt} - \mu \triangle u - (\lambda + \mu)\nabla \mathrm{div} u + k\alpha \nabla \theta &= 0 \text{ in } (0,\infty) \times \Omega, \\
\rho c_\rho \theta_t - k \triangle \theta + k\alpha\theta_0 \mathrm{div} u_t &= 0 \text{ in } (0,\infty) \times \Omega, \\
u(t,\cdot) = 0, \quad \theta(t,\cdot) &= 0 \text{ in } (0,\infty) \times \Gamma_0, \\
-\mu \nabla u(t,\cdot) n - (\mu + \lambda) n \mathrm{div} u(t,\cdot) + k\alpha\theta(t,\cdot) n = 0, \quad \tfrac{\partial \theta(t,\cdot)}{\partial n} &= 0 \text{ in } (0,\infty) \times \Gamma_1, \\
u(0,\cdot) = u^0, \quad u_t(0,\cdot) = u^1, \quad \theta(0,\cdot) &= \theta^0 \text{ in } \Omega,
\end{aligned}$$

wobei u^0, u^1, θ^0 vorgegebene Funktionen sind und ∇u die Jacobi-Matrix von u bzgl. der x-Variablen bezeichnet. Es existiere eine Lösung

$$(u, \theta) \in \mathcal{C}^0\big([0,\infty) \times \bar{\Omega}, \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}\big)$$

mit $\nabla u, \nabla u_t \in \mathcal{C}^0([0,\infty) \times \bar{\Omega}, \mathbb{R}^{d\times d})$, $\nabla^2 u \in \mathcal{C}^2([0,\infty) \times \bar{\Omega}, \mathbb{R}^{d\times d\times d})$, $\nabla^2 \theta \in \mathcal{C}^0([0,\infty) \times \bar{\Omega}, \mathbb{R}^{d\times d})$. Es bezeichne

$$\sigma := \mu \nabla u + (\lambda + \mu)\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{3\times 3}} \mathrm{div} u$$

den Spannungstensor.

a) Definieren Sie $V := (\sigma, u_t, \theta)^T$ sowie

$$\mathcal{X} := \big(\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})\big)^{d\times d} \times \big(\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})\big)^d \times \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$$

und bestimmen Sie einen Differentialoperator $\mathcal{A} \colon D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ und eine Funktion $V^0 \in \mathcal{X}$ so, dass

$$\begin{aligned}
\partial_t V &= \mathcal{A} V \text{ in } (0,\infty) \times \Omega, \\
V(0,\cdot) &= V^0 \text{ in } \Omega
\end{aligned}$$

gilt.

Hinweis: Die Randbedingungen sollen in den Definitionsbereich $D(\mathcal{A})$ von $\mathcal{A}$ eingebaut werden.

b) Zeigen Sie, dass die natürliche Energie

$$E(t) := \theta_0 \int_\Omega \left(\rho |u_t(t,x)|^2 + \mu \sum_{i=1}^d |\nabla u_i(t,x)|^2 + (\lambda+\mu)|\mathrm{div} u(t,x)|^2 + \tfrac{\rho c_\rho}{\theta_0}\theta^2(t,x) \right) \mathrm{d}x$$

monoton fallend ist.

Abgabetermin: Montag, den 25. November 2013, vor 12:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.