Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dr. Michael Pokojovy

25. November 2013

Theorie und Numerik Partieller Differentialgleichungen
6. Übungsblatt

Aufgabe 6.1 (4 Punkte)

Wir betrachten eine gezupfte Saite der Länge $L > 0$. Sei $c := \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, wobei $\rho > 0$ und $E > 0$ die Massendichte sowie den Elastizitätsmodul bezeichnen. Die Auslenkung u der Saite genüge der Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} && \text{in} \quad (0,\infty) \times (0,L), \\ u &= 0 && \text{in} \quad (0,\infty) \times \{0,L\}, \\ u(0,\cdot) &= \tfrac{L}{2} - |\cdot - \tfrac{L}{2}| && \text{in} \quad (0,L), \\ u_t(0,\cdot) &= 0 && \text{in} \quad (0,L). \end{aligned}$$

Lösen Sie das Problem der gezupften Saite mit Hilfe der d'Alembertschen Methode.

Hinweis: Setzen Sie u auf ungerade Weise zu einer $2L$-periodischen Funktion fort.

Aufgabe 6.2 (4 Punkte)

Die Auslenkung u einer Saite der Länge $L > 0$ unter Einfluss der Schwerkraft $g > 0$ genüge der Wellengleichung

$$\begin{aligned} \rho u_{tt} &= E u_{xx} - \rho g && \text{in} \quad (0,\infty) \times (0,L), \\ u &= 0 && \text{in} \quad (0,\infty) \times \{0,L\}, \\ u(0,\cdot) &= 0 && \text{in} \quad (0,L), \\ u_t(0,\cdot) &= 0 && \text{in} \quad (0,L), \end{aligned}$$

wobei $\rho > 0$ und $E > 0$ die Massendichte sowie den Elastizitätsmodul bezeichnen.

a) Leiten Sie über den Ansatz $u(t,\cdot) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\varphi_n$, $t \in [0,\infty)$, mit $\varphi_n := \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\frac{n\pi\cdot}{L})$, $n \in \mathbb{N}$, eine gewöhnliche Differentialgleichung für u_n her und bestimmen Sie u_n.

b) Zeigen Sie, dass die Reihe $t \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\varphi_n$ eine Funktion $u \in \mathcal{C}^0\big([0,\infty), L^2(\Omega)\big)$ darstellt.

Aufgabe 6.3 (4 Punkte)

Mit $B\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und $E\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bezeichnen wir das magnetische und das elektrische Feld im Ganzraum. Die Maxwellschen Gleichungen für die beiden Vektorfelder lauten dann:

$$\begin{aligned} B_t = -\mathrm{rot} E, &\quad \mathrm{div} B = 0 \text{ in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^3, \\ E_t = c^2 \mathrm{rot} B, &\quad \mathrm{div} E = 0 \text{ in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^3, \\ B(0,\cdot) = B^0 \text{ in } \mathbb{R}^3&, \\ E(0,\cdot) = E^0 \text{ in } \mathbb{R}^3&, \end{aligned}$$

wobei $c > 0$ die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum bezeichnet und B^0, E^0 vorgegebene divergenzfreie Vektorfelder sind.

a) Beweisen Sie, dass Lösungen $(B,E) \in \mathcal{C}^1\big([0,\infty),(L^2(\mathbb{R}^3))^6\big) \cap \mathcal{C}^0\big([0,\infty),(H^1(\mathbb{R}^3))^6\big)$ eindeutig sind.

HINWEIS: Verwenden Sie die Energiemethode.

b) Zeigen Sie unter der Annahme

$$(B,E) \in \mathcal{C}^2\big([0,\infty),(L^2(\mathbb{R}^3))^6\big) \cap \mathcal{C}^1\big([0,\infty),(H^1(\mathbb{R}^3))^6\big) \cap \mathcal{C}^0\big([0,\infty),(H^2(\mathbb{R}^3))^6\big),$$

dass B und E komponentenweise einer Wellengleichung genügen, und geben Sie die Anfangsbedingungen für B_t und E_t an.

Aufgabe 6.4 (4 Punkte)

Sei $\Omega := (0,L)$, $L > 0$. Ferner seien $\kappa \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega},\mathbb{R})$, $\rho \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega},\mathbb{R})$ mit $\kappa(x) > 0$ und $\rho(x) > 0$ für alle $x \in [0,L]$. Gegeben sei die Wellengleichung

$$\begin{aligned} \rho(x)u_{tt}(t,x) - \partial_x(\kappa(x)\partial_x u_x(t,x)) &= 0 \text{ für } (t,x) \in (0,\infty)\times(0,L),\\ u(t,0) = u_x(t,L) &= 0 \text{ für } t \in (0,\infty),\\ u(0,x) &= u^0(x) \text{ für } x \in (0,L),\\ u_t(0,x) &= u^1(x) \text{ für } x \in (0,L), \end{aligned} \tag{1}$$

wobei $u^0 \in \mathcal{C}^2([0,L],\mathbb{R})$ und $u^1 \in \mathcal{C}^1([0,L],\mathbb{R})$ mit $u^0(0) = u^0_x(L) = 0$ und $u^1(0) = u^1_x(L) = 0$ vorgegeben sind. Sei $u \in \mathcal{C}^2([0,\infty)\times\bar{\Omega},\mathbb{R})$ eine Lösung zu (1). Wir definieren die zugehörige Energie durch

$$E(t) := \tfrac{1}{2}\int_0^L \rho(x)(u_t(t,x))^2 + \kappa(x)(u_x(t,x))^2 \mathrm{d}x \text{ für } t \geq 0.$$

Beweisen Sie:

a) Es gibt Konstanten $C_1, C_2 > 0$, die nicht von u^0 und u^1 abhängen, so, dass

$$C_1\left(\|u_t(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u(t,\cdot)\|^2_{H^1(\Omega)}\right) \leq E(t) \leq C_2\left(\|u_t(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u(t,\cdot)\|^2_{H^1(\Omega)}\right)$$

für alle $t \geq 0$ gilt.

HINWEIS: Zeigen Sie zunächst, dass für $u(t,\cdot)$, $t \in [0,\infty)$, die Poincarésche Ungleichung gilt.

b) Es gilt für alle $t \geq 0$:

$$E(t) = \tfrac{1}{2}\int_0^L \rho(x)(u^1(x))^2 + \kappa(x)(u^0_x(x))^2 \mathrm{d}x.$$

Abgabetermin: Montag, den 2. Dezember 2013, vor 12:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.