Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dr. Michael Pokojovy

2. Dezember 2013

Theorie und Numerik Partieller Differentialgleichungen
7. Übungsblatt

Aufgabe 7.1 (4 Punkte)

Ein homogener, isotroper elastischer Festkörper mit konstanter Massendichte $\rho > 0$ und Lamé-Konstanten $\lambda, \mu > 0$ belege ein beschränktes Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ mit glattem Rand Γ, auf welchem er befestigt sei. Auf den Körper wirke eine Volumenkraft $f \in (L^2(G))^3$. Das Verschiebungsvektorfeld $u\colon G \to \mathbb{R}^3$ genügt dann den Lamé-Gleichungen:

$$\begin{aligned} -\mu\triangle u - (\lambda + \mu)\nabla \mathrm{div} u &= \rho f \text{ in } G, \\ u &= 0 \text{ auf } \Gamma. \end{aligned} \tag{1}$$

a) Leiten Sie eine schwache Formulierung der Randwertaufgabe (1) her.

b) Zeigen Sie, dass diese eine eindeutige Lösung $u \in (H_0^1(G))^3$ besitzt.

Aufgabe 7.2 (4 Punkte)

Sei $G \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Ferner sei $a \in \mathcal{C}^\infty(G, \mathbb{R}^{d\times d})$ symmetrisch und gleichmäßig positiv definit in G. Wir definieren den Operator

$$\mathcal{A}\colon D(\mathcal{A}) \subset L^2(G) \to L^2(G), \quad u \mapsto \mathrm{div}(a(\cdot)\nabla u),$$

wobei

$$D(\mathcal{A}) := \{u \in H_0^1(G) \,|\, \mathrm{div}(a(\cdot)\nabla u) \in L^2(G)\}.$$

Zeigen Sie:

a) $\mathcal{A}$ ist linear, dicht definiert und abgeschlossen.

b) Es gilt $(0, \infty) \subset \rho(\mathcal{A})$.

c) Es existiert $C > 0$ so, dass für alle $\lambda \in (0, \infty)$

$$\|(\mathcal{A} - \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(G))} \leq \tfrac{C}{\lambda}$$

gilt.

Aufgabe 7.3 (4 Punkte)

Seien $d, n \in \mathbb{N}$ und sei $(x_k, y_k)_{k=1,\ldots,n} \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$. Zu $\alpha, \beta > 0$ und $s := \lceil \frac{d}{4} \rceil$ definieren wir das Funktional

$$F(u) := \tfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (u(x_k) - y_k)^2 + \alpha \int_{\mathbb{R}^d} |\triangle^s u(x)|^2 \mathrm{d}x + \beta \int_{\mathbb{R}^d} u^2(x) \mathrm{d}x, \quad u \in H^{2s}(\mathbb{R}^d).$$

a) Beweisen Sie, dass F wohldefiniert ist.

Hinweis: Folgern Sie die Stetigkeit der Restriktion $u \mapsto u|_{\{x_1,\ldots,x_n\}}$ aus dem Sobolevschen Einbettungssatz.

b) Zeigen Sie, dass F sein globales Minimum an einer Stelle $u^* \in H^{2s}(\mathbb{R}^d)$ annimmt.

c) Leiten Sie die schwache Formulierung des elliptischen Problems her, welchem u^* genügen muss.

HINWEIS: Betrachten Sie die erste Variation bzw. die Gâteaux-Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}F(u+\varepsilon\varphi)|_{\varepsilon=0}$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, von F und setzen Sie diese gleich Null.

d) Wie lautet die starke Formulierung des elliptischen Problems aus c)?

Bemerkung 7.1

Der in der Aufgabe 7.3 beschriebene Minimierungsansatz wird im Rahmen der Nichtparametrischen Statistik beim Lösen des Regressionsproblems verwendet, welches nachstehend grob formuliert wird.

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$, $Y\colon \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen. Unter gewissen Regularitätsvoraussetzungen kann man die Abhängigkeit zwischen Y und X durch Minimierung des quadratischen Fehlers

$$u(x) = \arg\min_v E\big[(E[Y|X=x] - v(x))^2\big] \text{ für } x \in \mathbb{R}^d$$

schätzen. Dann gilt

$$u(x) = \mathrm{E}\big[\mathrm{E}[Y|X=x]] \text{ für } x \in \mathbb{R}^d.$$

Das Regressionsproblem besteht darin, die Funktion u durch ein $\hat{u}$ anhand einer aus der zu (X, Y) gehörigen Grundgesamtheit gezogenen Stichprobe $(X_k, Y_k)_{k=1,\dots,n}$ zu schätzen.

Abgabetermin: Montag, den 9. Dezember 2013, vor 12:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.