Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. A. Prestel

27. Januar 2010

Mathematische Logik

11. Übungsblatt

Aufgabe 1 Sei L eine formale Sprache und $\mathcal{A}$ eine L-Struktur. Sei $\mathcal{B}$ eine *Substruktur* von $\mathcal{A}$, d.h. $|\mathcal{B}| \subseteq |\mathcal{A}|$, $|\mathcal{B}|$ ist abgeschlossen unter den Funktionen $f_i^{\mathcal{A}}$, mit den eingeschränkten Relationen $R_j^{\mathcal{A}}$ von $\mathcal{A}$ versehen und enthält alle Konstanten $c^{\mathcal{A}}$. Wir erweitern L um ein einstelliges Relationszeichen B zur Sprache L^* und machen $\mathcal{A}$ zu einer L^*-Struktur vermöge $B^{\mathcal{A}}(a) :\Leftrightarrow a \in |\mathcal{B}|$.

Zeige, dass es zu jeder L-Formel φ eine L^*-Formel φ^* gibt, so dass für jede Belegung $h\colon Vbl \to |\mathcal{B}|$ gilt:

$$\mathcal{B} \models \varphi[h] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi^*[h].$$

Aufgabe 2 Sei $L = (E)$ die Sprache der Graphen (vgl. Aufgabe 2, Blatt 8). Sei $\Sigma \subset \mathrm{Aus}(L)$ ein Axiomensystem für die Klasse der unendlichen Graphen.

Zeige, dass Σ nicht vollständig ist.

Aufgabe 3 Sei $L = (\cdot, 1)$ die Sprache der (multiplikativ geschriebenen) Gruppen. Wir nennen eine Gruppe G *Torsionsgruppe*, wenn es für jedes $a \in G$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $a^n = 1$.

Zeige, dass sich die Klasse der Torsionsgruppen nicht in L axiomatisieren lässt.

Abgabe:
Mittwoch, 8. Februar 2010, 14 Uhr, in die Briefkästen auf F4.