

## Mathematische Logik

### 7. Übungsblatt

**Aufgabe 1** Sei  $L$  eine formale Sprache.

- (i) Zeige, dass sich die Klasse aller endlichen  $L$ -Strukturen nicht mit  $L$ -Aussagen axiomatisieren lässt.

*Hinweis:* Nimm an, dass es eine Axiomatisierung gibt. Füge zu diesen Axiomen geeignete weitere Aussagen hinzu und verwende den Endlichkeitssatz um einen Widerspruch zu erhalten.

- (ii) Zeige, dass sich die Klasse der unendlichen  $L$ -Strukturen zwar mit unendlich vielen  $L$ -Aussagen axiomatisieren lässt, nicht jedoch mit nur endlich vielen.

**Aufgabe 2** Die Sprache  $L$  bestehe nur aus dem zweistelligen Relationszeichen  $>$ . Wir nennen eine  $L$ -Struktur  $\mathcal{A}$  eine *wohlgeordnete Menge*, wenn  $>^{\mathcal{A}}$  eine strikte lineare Ordnung auf  $|\mathcal{A}|$  ist, bezüglich der es keine unendlichen absteigenden Folgen

$$a_0 >^{\mathcal{A}} a_1 >^{\mathcal{A}} \dots >^{\mathcal{A}} a_n >^{\mathcal{A}} \dots$$

gibt.

Zeige, dass sich die Klasse der wohlgeordneten Mengen nicht durch ein Axiomensystem in  $L$  charakterisieren lässt.

*Hinweis:* Erweitere die Sprache gegebenenfalls durch Hinzunahme von Konstanten und gehe dann ähnlich wie in Aufgabe 1 (i) vor.

**Aufgabe 3** Diese Aufgabe ist zur Überprüfung der eigenen Kenntnisse gedacht, darf aber auch abgegeben werden.

- (i) Was ist eine formale Sprache  $L$ ? Was ist eine  $L$ -Formel? Was ist der Unterschied zwischen einer gebundenen und einer freien Variablen?
- (ii) Was ist eine  $L$ -Struktur? Wie ist das "Gelten" einer  $L$ -Aussage in einer  $L$ -Struktur definiert?
- (iii) Was ist ein Modell einer Aussagenmenge?
- (iv) Sei  $\Sigma$  eine Menge von  $L$ -Aussagen,  $\varphi$  eine  $L$ -Aussage und  $\mathcal{A}$  eine  $L$ -Struktur. Was bedeuten die folgenden Ausdrücke:

$$\Sigma \vdash \psi \quad \mathcal{A} \models \varphi \quad \mathcal{A} \models \Sigma$$

- (iv) Was besagt der Gödel'sche Vollständigkeitssatz? Wie beweist man daraus den Endlichkeitssatz?
- (v) Was bedeutet deduktiv abgeschlossen? Was ist eine vollständige Aussagenmenge?
- (vi) Was versteht man unter Axiomatisierbarkeit einer Klasse von Strukturen?

**Abgabe:**

Freitag, 8. Januar 2010, 12 Uhr, in die Briefkästen auf F4.