

Mathematische Logik

8. Übungsblatt

Aufgabe 1 Sei $L = (+, -, \cdot, 0, 1)$ und $\Sigma \subseteq \text{Aus}(L)$ die Menge aller Aussagen, die in \mathbb{Q} gelten. Wir erweitern L nun durch Hinzunahme der neuen Konstanten $\{c_r\}_{r \in \mathbb{R}}$ (also überabzählbar viele) zur Sprache L' . Sei $\Lambda \subseteq \text{textrm{Aus}}(L')$ die folgende Menge von Axiomen:

$$\Lambda := \{c_r \neq c_t \mid r, t \in \mathbb{R}, r \neq t\}.$$

- (i) Zeige, dass die Menge $\Sigma \cup \Lambda$ ein Model besitzt.
- (ii) Zeige, dass kein Modell von $\Sigma \cup \Lambda$ zu \mathbb{Q} isomorph sein kann.
- (iii) Folgere aus (i) und (ii), dass es kein Axiomensystem in der Sprache L geben kann, das \mathbb{Q} bis auf Isomorphie charakterisiert.

Aufgabe 2 Sei E ein zweistelliges Relationszeichen und $L = (E)$ die Sprache der Graphen. Unter einem Graph verstehen wir eine (möglicherweise unendliche) L -Struktur \mathcal{A} , in der die zweistellige Relation $E^{\mathcal{A}}$ symmetrisch und irreflexiv ist (man stelle sich den Individuenbereich als Menge von Punkten vor, in der je zwei Punkte x, y durch eine Linie verbunden sind, wenn $E^{\mathcal{A}}(x, y)$ gilt).

Welche der folgenden Klassen von L -Strukturen sind axiomatisierbar? Gib jeweils ein Axiomensystem an oder zeige, dass es keins geben kann.

- (i) Die Klasse aller Graphen
- (ii) Die Klasse aller L -Strukturen, die keine Graphen sind
- (iii) Die Klasse aller endlichen Graphen (d.h. Graphen mit endlichem Individuenbereich)
- (iv) Die Klasse aller unendlichen Graphen
- (v) Die Klasse aller zusammenhängenden Graphen. Dabei heißt ein Graph zusammenhängend, wenn es zu je zwei Punkten x, y einen endlichen Weg von x nach y gibt, d.h. eine Abfolge von Linien, die bei x beginnt und bei y endet.

Aufgabe 3 Sei $L = (+, \cdot, 0, 1)$ die Sprache der Körpertheorie und sei K ein Körper. Sei φ eine quantorenfreie L -Formel mit $\text{Fr}(\varphi) = \{x\}$. Dann betrachten wir die Menge aller Elemente aus K , welche für x eingesetzt die Formel erfüllen.

Welche Teilmengen von K erhält man auf diese Art und Weise? Was passiert, wenn man auch Quantoren erlaubt?

(Die zweite Frage muss nicht völlig exakt beantwortet werden, sondern kann anschaulich behandelt werden.)

Abgabe:

Mittwoch, 13. Januar 2010, 14 Uhr, in die Briefkästen auf F4.