Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. A. Prestel

13. Januar 2010

Mathematische Logik

9. Übungsblatt

Aufgabe 1 Sei $L = (+, \cdot, 0, 1)$ die Sprache der Ringe. Sei M ein dreistelliges Relationszeichen. Für beliebige Ringe $\mathcal{A}$ und $a, b, c \in |\mathcal{A}|$ definieren wir nun $M^{\mathcal{A}}(a, b, c) :\Leftrightarrow a \cdot b = c$.

Gib eine Formel für M an, die gerade die Kommutativität der Ringmultiplikation ausdrückt.

Aufgabe 2 Sei L eine formale Sprache. Für jedes Funktionszeichen f_i von L führen wir ein neues Relationszeichen F_i mit einer um eins höheren Stelligkeit ein. So erhalten wir die erweiterte Sprache L'. Eine L-Struktur $\mathcal{A}$ machen wir durch die folgende Definition zu einer L'-Struktur $\mathcal{A}'$:

$$F_i^{\mathcal{A}'}(a_1, \ldots, a_s, a) :\Leftrightarrow f_i^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_s) = a$$

für Elemente $a_1, \ldots, a_s, a \in |\mathcal{A}|$.

Zeige, dass man jeder L-Formel φ eine L'-Formel φ' mit den folgenden Eigenschaften zuordnen kann:

(i) In φ' tauchen keine Funktionszeichen auf

(ii) Für beliebige L-Strukturen $\mathcal{A}$ und beliebige Variablenbelegungen h gilt :

$$\mathcal{A} \models \varphi[h] \Leftrightarrow \mathcal{A}' \models \varphi'[h].$$

Hinweis: Betrachte zuerst Primformeln φ der Gestalt $t \doteq x$, mit t Term und x Variable, und definiere φ' induktiv über den Aufbau von t. Definiere die Zuordnung $\varphi \mapsto \varphi'$ dann iterativ über den Formelaufbau.

Aufgabe 3 Sei $L = (+, -, \cdot, 0, 1)$ die Sprache der Körpertheorie.

(i) Finde ein Axiomensystem $\Sigma \subseteq \mathrm{Aus}(L)$, das den Körper $\mathbb{F}_{49}$ bis auf Isomorphie charakterisiert.

(ii) Finde ein Axiomensystem $\Sigma \subseteq \mathrm{Aus}(L)$, welches gerade die endlichen Körpererweiterungen von $\mathbb{F}_{49}$ vom Grad ≤ 7 beschreibt.

Abgabe:
Mittwoch, 20. Januar 2010, 14 Uhr, in die Briefkästen auf F4.