

# Vorwort

Mit diesem Band 1 und dem sich anschließenden Band 2 wird ein *Kompendium* für einen kompletten Analysiszug in einem Bachelor-Studiengang *Mathematik* vorgelegt. Die Inhalte entsprechen den Standardveranstaltungen

- Analysis I, Analysis II des ersten Jahres mit je 4 Semesterwochenstunden (SWS) mit der Differential- und Integralrechnung,
- der Analysis III mit 2 SWS Theorie Gewöhnlicher Differentialgleichungen und 2 SWS Lebesguescher Maß- und Integrationstheorie,
- der Analysis IV mit 2 SWS Funktionentheorie und 4 SWS Funktionalanalysis sowie
- einer Einführung in die Theorie Partieller Differentialgleichungen mit 2 SWS im dritten Jahr.

Damit wird ein Bogen geschlagen von den Grundlagen der Analysis bis hin zu den Anfängen einer möglichen Spezialisierung in Richtung Analysis im Bereich Partielle Differentialgleichungen.

Um den Studierenden eine Möglichkeit zu geben, in wenigen Büchern alles nachlesen zu können, was in den Vorlesungen zur Analysis üblicherweise in einem Bachelor-Studiengang auftaucht, wurde als Format eine Kompendiumform, wie sie bei Merkblättern üblich ist, gewählt. Diese neue Form als Buch orientiert sich dann zwar inhaltlich an Vorlesungen, die die Autoren nun schon mehrfach an der Universität Konstanz gehalten haben, bietet jedoch allen an der Analysis Interessierten unabhängig vom Hochschulort ein konzentriertes Nachschlagewerk, da die Thematik trotz aller Spezialisierungen an verschiedenen Orten immer noch universell ist. Selbst für Leute, die nur spezielle Themen nachschlagen wollen, bleibt immer noch ein sehr großer Fundus in Analysis im vorgelegten und dem noch folgenden Band 2.

Zum gewählten neuen Kompendiumformat hinaus passt ein Kapitel *Prüfungsfragen*, in dem sich die Studierenden auf mündliche oder schriftliche Prüfungen einstimmen können – keine Übungsaufgaben plus Lösungen sondern Simulation und Beherrschung von Prüfungen ist gefragt. Ein ausführlicher Index rundet das Kompendium ab. Die beiden Bände 1 und 2 sind weitgehend unabhängig

voneinander von Nutzen, nicht nur, weil sich der Inhalt chronologisch anordnet. Die Kompendiumform bietet sowohl den Studierenden als auch den eine Vorlesung planenden Dozenten durch die Vorlesungsnähe eine hilfreiche Grundlage.

Im Stil geht vieles auf Merkblätter zurück, die der zweite Autor bei Prof. Dr. Dr. h.c. Rolf Leis an der Universität Bonn kennenlernte. Inhaltlich gibt es eine Reihe von zugrunde liegenden Büchern, von denen besonders die beiden Bände [2, 3] von Barner & Flohr zu nennen sind.

Die gewählte chronologische Reihenfolge in diesem Band 1 behandelt in den Kapiteln 1–9 die Differential- und Integralrechnung des ersten Semesters (entspricht 4 SWS Vorlesung), in den Kapiteln 10–14 die des zweiten Semesters (4 SWS). In den Kapiteln 15–19 werden Gewöhnliche Differentialgleichungen (2 SWS) behandelt. Kapitel 20 liefert die genannte Hilfestellung zur Prüfungsvorbereitung, dem sich Literaturangaben zur Standardliteratur zu den Themen des Buches anschließen.

Band 2 wird dann die Gebiete Lebesguesche Maß- und Integrationstheorie (2 SWS), Funktionentheorie (2 SWS), Funktionalanalysis (4 SWS) und Partielle Differentialgleichungen (Einführung, 2 SWS) behandeln.

Wir danken den Mitarbeitern Dipl.-Math. Mario Kaip, Dipl.-Math. Patrick Kurth, Dipl.-Math. Tobias Nau und Dipl.-Math. Michael Pokojovy für das Korrekturlesen und für Verbesserungsvorschläge sowie dem Verlag Vieweg+Teubner, insbesondere Frau Ulrike Schmickler-Hirzebruch, für die Aufnahme in das Verlagsprogramm.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Differential- und Integralrechnung, Kapitel 1 – 14</b>	<b>1</b>
<b>1 Grundlagen und Bezeichnungen</b>	<b>3</b>
1.1 Mengen und Abbildungen . . . . .	3
1.2 Elemente der Logik . . . . .	5
<b>2 Zahlen</b>	<b>7</b>
2.1 Natürliche und rationale Zahlen . . . . .	7
2.1.1 Natürliche Zahlen . . . . .	7
2.1.2 Rationale Zahlen . . . . .	12
2.2 Reelle Zahlen . . . . .	14
2.3 Komplexe Zahlen . . . . .	15
<b>3 Folgen und Grenzwerte</b>	<b>17</b>
<b>4 Reihen</b>	<b>23</b>
<b>5 Elemente der Topologie und der Funktionalanalysis</b>	<b>27</b>
5.1 Mächtigkeit von Mengen . . . . .	27
5.2 Metrische Räume . . . . .	29
5.3 Reelle Punktmengen . . . . .	32
5.4 Kompakte Mengen . . . . .	35
5.5 Normierte Räume und Hilberträume . . . . .	38
<b>6 Stellenwertsysteme und die Zahl <math>e</math></b>	<b>43</b>
6.1 Stellenwertsysteme . . . . .	43
6.2 Die Zahl $e$ . . . . .	45
<b>7 Funktionen einer reellen Veränderlichen</b>	<b>47</b>
7.1 Stetige Funktionen . . . . .	47
7.2 Funktionenfolgen . . . . .	55
7.3 Elementare Funktionen . . . . .	58
7.3.1 Die Exponentialfunktion und der Logarithmus . . . . .	58
7.3.2 Sinus, Cosinus und Hyperbelfunktionen . . . . .	60

---

7.4	Differenzierbare Abbildungen . . . . .	64
7.5	Der Mittelwertsatz und Folgerungen . . . . .	68
<b>8</b>	<b>Integration im <math>\mathbb{R}^1</math></b>	<b>75</b>
8.1	Stammfunktionen . . . . .	75
8.2	Treppenfunktionen und ihre Integrale . . . . .	79
8.3	Regelfunktionen . . . . .	83
8.4	Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung . . . . .	87
8.5	Vertauschung von Grenzprozessen . . . . .	89
8.6	Parameterabhängige Integrale . . . . .	92
8.7	Uneigentliche Integrale . . . . .	94
8.8	Das Riemannsches Integral . . . . .	98
<b>9</b>	<b>Reihen von Funktionen</b>	<b>101</b>
9.1	Differentiation und Integration . . . . .	101
9.2	Potenzreihen . . . . .	103
9.3	Taylorreihen . . . . .	109
9.4	Der Weierstraßsche Approximationssatz . . . . .	114
9.5	Orthonormalsysteme . . . . .	119
9.6	Konvergenz von Fourierreihen . . . . .	124
<b>10</b>	<b>Die Topologie des <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>131</b>
10.1	$\mathbb{R}^n$ als normierter Vektorraum . . . . .	131
10.2	Stetigkeit und Kompaktheit . . . . .	134
<b>11</b>	<b>Funktionen mehrerer Veränderlicher</b>	<b>139</b>
11.1	Differenzierbare Abbildungen . . . . .	139
11.2	Der Mittelwertsatz . . . . .	148
11.3	Höhere Ableitungen . . . . .	150
11.4	Extrema unter Nebenbedingungen . . . . .	160
<b>12</b>	<b>Kurven und Flächen</b>	<b>165</b>
12.1	Weglängen . . . . .	165
12.2	Kurven in der Ebene und im Raum . . . . .	169
12.3	$m$ -dimensionale Flächen im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	171
<b>13</b>	<b>Integration im <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>177</b>
13.1	Maße und messbare Funktionen . . . . .	177
13.2	Das Lebesgue-Integral . . . . .	184
13.3	Iterierte Integrale . . . . .	191
13.4	Der Transformationssatz . . . . .	194
13.5	Kurvenintegrale und Flächenintegrale . . . . .	197
13.6	Die Integralsätze von Gauß und Stokes . . . . .	207

---

<b>14 Lokale Umkehrbarkeit und implizite Funktionen</b>	<b>217</b>
14.1 Lokale Umkehrbarkeit . . . . .	217
14.2 Implizite Funktionen . . . . .	219
<b>Gewöhnliche Differentialgleichungen, Kapitel 15 – 19</b>	<b>225</b>
<b>15 Differentialgleichungen – Beispiele</b>	<b>227</b>
<b>16 Klassische Existenz- und Eindeutigkeitssätze</b>	<b>233</b>
<b>17 Spezielle Lösungsmethoden</b>	<b>243</b>
17.1 Spezielle Gleichungen . . . . .	243
17.2 Lineare Systeme . . . . .	248
<b>18 Qualitative Aspekte</b>	<b>257</b>
18.1 Stabilität . . . . .	261
18.2 Periodische Lösungen (im $\mathbb{R}^2$ ) . . . . .	266
18.3 Phasenporträts: Beispiele . . . . .	267
<b>19 Rand- und Eigenwertaufgaben</b>	<b>273</b>
19.1 Lineare Randwertaufgaben $n$ -ter Ordnung . . . . .	274
19.2 Die Greensche Funktion . . . . .	277
19.3 Eigenwertaufgaben . . . . .	283
<b>Prüfungsvorbereitung</b>	<b>293</b>
<b>20 Prüfungsvorbereitung</b>	<b>295</b>
20.1 Analysis I: Kapitel 1 – 9 . . . . .	295
20.2 Analysis II: Kapitel 10 – 14 . . . . .	298
20.3 Analysis III: Gewöhnliche Differentialgleichungen . . . . .	301
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>303</b>
<b>Notation</b>	<b>305</b>
<b>Index</b>	<b>309</b>



# Index

- Abbildung, 4
  - beschränkte lineare, 138
  - bijektive, 5
  - injektive, 5
  - kontrahierende, 63
  - lineare, 138
  - surjektive, 5
- Abel, N. H., 13, 104
- Ableitung, 64, 140
  - höhere, 151
  - partielle, 92, 141
- Absolutbetrag, 13, 16
- Additionstheorem, 59
- Äquivalenz, 5
- Äquivalenzklasse
  - von Cauchy-Folgen, 20
- Äquivalenzrelation, 8
- $\aleph$ , 29
- $\alpha$ -Limesmenge, 261
- Araber, 43
- Areal, 204
- arithmetisches Mittel, 156
- Arzelà, C., 238
- Ascoli, G., 238
- Assoziativgesetz, 8
- Assoziativität, 4, 13
- Ausgleichsgerade, 158
- Aussage, 5
- Auswahlsatz, 237
  
- Babylonier, 43
- Ball, 30
- Banach, S., 31
- Bendixson, I.O., 266
- Bernoulli, Jak. (I), 10
- Bernoulli, Joh. (I), 244
- Bernoullische Ungleichung, 10
- Bernstein, S.N., 116
- Bernstein-Polynom, 116
- Beschleunigungsvektor, 168
- Bessel, F.W., 120, 245
- Bessel-Funktion, 245
- Besselsche Identität, 120
- Besselsche Ungleichung, 120
- bestimmt divergent gegen Unendlich, 18
- Bewegung, 257
- Beweis
  - indirekter, 6
- Bild, 4
- Bildmaß, 194
- Binomialkoeffizient, 11
- Binomische Formel, 11
- Binormale, 170
- Bit, 45
- Bogenlänge, 168, 205
- Bogenlängenparameter, 61
- Bogenmaß, 60, 229
- Bolzano, B., 34
- Borel, É, 35
- Brennpunkt, 258
- Brouwer, L.E.J., 222
- Byte, 45
  
- Cantor, G., 29
- Cantor-Menge, 182
- Cantorsches Diagonalverfahren, 29
- Cartan, É.J., 198
- Cauchy, A.-L., 17
- Cauchy-Folge, 30

- Cauchysches Polygonzugverfahren, 239  
 Cavalieri, B.F., 192  
 Cohen, P., 29  
 Cosinus, 60  
 cosinus hyperbolicus, 63  
 Courant, R., 291  
 Courantsches Minimax-Prinzip, 291  
 Dedekind, R., 15  
 Dedekindscher Schnitt, 15  
 Definitionsbereich, 4  
 Definitionsmenge, 4  
 Dezimalbruch, 43  
 Dezimalsystem, 43  
 Dezimalzahl  
   periodische, 43  
 dicht, 30  
 Diffeomorphismus, 148  
 Differential  
   totales, 200  
 Differentialform  
    $p$ -, 215  
   Pfaffsche, 198  
 Differentialgleichung, 70, 108  
   autonome, 230  
   Bernoullische, 244  
   exakte, 246  
   explizite, 230  
   gewöhnliche, 227  
   homogene, 244  
   implizite, 230  
   partielle, 227, 266  
   Ricattische, 244  
   separable, 243  
 Dirac, P.A.M., 179  
 Dirichlet, J.P.G.L., 275  
 Distributivgesetz, 8, 13  
 Distributivität, 4  
 divergent, 18  
 Divergenz, 146  
 Dreiecksungleichung, 13, 29, 132  
 Dualzahl, 44  
 Durchschnittsmenge, 4  
 e, 45  
 Eigenfunktion, 284  
 Eigenvektor, 252  
 Eigenwert, 252, 284  
 Eigenwertaufgabe, 273, 283  
   Sturm & Liouvillesche, 283  
 1-Form, 198  
   exakte, 200  
   wegunabhängige, 200  
 Element, 3  
 Ellipse, 168  
 Erdradius, 228  
 Erzeugendensystem, 178  
 Euler, L., 45  
 Euler-Verfahren, 239  
 Eulersches Polygonzugverfahren, 268  
 Exponentialfunktion, 58  
 Extremwertaufgabe, 71, 160  
 Fakultät, 11  
 Falllinie, 145  
 Familie, 119  
 Fatou, P.J.L., 188  
 Fehlerabschätzung, 235  
 Fixpunkt, 257  
 Fixpunktgleichung, 31  
 Flächeninhalt, 80, 204  
   elementargeometrischer, 80  
    $m$ -dimensionaler, 205  
 Flächenintegral, 214  
 Fluchtgeschwindigkeit, 229  
 Fluss, 257  
 Fokus, 258  
 Folge, 17  
   Cauchy-, 17  
 Fortsetzung, 5  
 Fourier, J.-B.-J., 120  
 Fourierkoeffizient, 120  
 Fourierreihe, 25, 124  
 freier Fall, 228  
 Frenet, J.F., 170  
 Frenetsche Gleichungen, 170  
 Fubini, G., 93  
 Fundamentalsystem, 249  
 Funktion, 4  
   Arcus-, 68



- 
- Borel-messbare, 182
  - charakteristische, 184
  - differenzierbare, 64, 140
  - einfache, 184
  - gleichmäßig stetige, 52
  - Heaviside-, 48
  - Hölder-stetige, 52
  - konkave, 159
  - konvexe, 159
  - Lebesgue-integrierbare, 98, 99
  - Lipschitz-stetige, 48
  - Lyapunov-, 264, 265
  - messbare, 182
  - monotone, 48
  - nirgends differenzierbare, 66
  - oszillierende, 49
  - partiell differenzierbare, 141
  - rechtsseitig differenzierbare, 65
  - rotationssymmetrische, 207
  - singuläre, 49
  - stetig differenzierbare, 65
  - stetige, 48
  - streng konkave, 159
  - streng konvexe, 159
  - streng monotone, 47
  - Stufen, 184
  - Treppen, 184
  - über eine Fläche integrierbare, 205
  - unstetige, 48
  - Funktional, 138
  - Funktionenfolge, 55, 101
  - Fußpunkt, 197
  
  - Gauß, C. F., 47
  - Gaußklammer, 82
  - Gebiet
    - sternförmiges, 246
  - geometrisches Mittel, 156
  - Geschwindigkeitsvektor, 168
  - Gleichgewichtszustand
    - einer Saite, 273
    - eines Balkens, 273
  - Gödel, K., 29
  - Gradient, 141
  
  - Gram, J.P., 204
  - Gramsche Determinante, 204
  - Gramsche Matrix, 204
  - Graph, 5
  - Gravitationsgesetz, 228
  - Gravitationskonstante, 228
  - Green, G., 277
  - Greensche Funktion, 277
  - Grenzfunktion, 55
  - Grenzpunkt, 261
  - Grenzwert, 18, 30, 49
    - linksseitiger, 49
  - Grenzwertsätze, 19
  - Gronwall, T.H., 236
  - Gronwallsches Lemma, 236
  - Gruppe, 13
    - abelsche, 13
    - kommutative, 13
  
  - Halbordnung, 8
  - Halbordnung auf  $\mathbb{N}$ , 8
  - Hauptvektoren, 253
  - Hausdorffsches Trennungsaxiom, 33
  - Hausdorff, F., 33
  - Heaviside, O.L., 48
  - Heine, E., 35
  - Hermite, C., 46
  - Hesse, L.O., 156
  - Hesse-Matrix, 156
  - Hexadezimalzahl, 44
  - Hilbert, D., 40
  - Hilbertraum, 40
  - Höhenlinie, 145
  - Hölder, O., 52
  - Hölderexponent, 52
  - Höldersche Ungleichung, 132
  - homöomorph, 222
  - Hyperbelfunktion, 63
  
  - Idempotenz, 4
  - Imaginärteil, 15
  - Implikation, 5
  - Inder, 43
  - Indexverschiebung, 12
  - Infimum, 14

- einer Funktion, 51
- Inhalt, 61
- Integral
  - bestimmtes, 81
  - elliptisches, 230
  - Lebesgue-, 185
  - parameterabhängiges, 92
  - Riemann-, 189
  - Riemannsches, 98
  - unbestimmtes, 75
  - uneigentliches, 94
  - von Treppenfunktionen, 81
- Integralgleichung, 234
- Integralkurve, 257
- Integration
  - Lebesguesche, 89
  - partielle, 76
- integrierbar
  - Lebesgue-, 186
  - Riemann-, 189
  - über eine Fläche, 205
- Intervall, 13
- inverses Element, 13
- isometrisch, 30
  
- Jacobi, C.G.J., 142
- Jacobi-Matrix, 142
- Jordan, M.E.C., 253
- Jordansche Normalform, 253
  
- Kardinalität, 27
- Kardinalzahl, 27
- kartesisches Produkt, 5
- Kettenregel, 144
- kleinste Fehlerquadrate, 158
- Knoten, 258
- Körper, 13
- Kommutativgesetz, 8
- Kommutativität, 4, 13
- Komplementmenge, 4
- Komposition, 5
- Kontingenzwinkel, 170
- Kontinuumshypothese, 29
- konvergent, 18
  - absolut, 24
  - Cauchy-, 17
  - gleichmäßig, 139
  - gleichmäßig (Cauchy-), 55
  - punktweise, 55
- Konvergenzradius, 105
- Koordinatentransformation, 147
- Kreisfunktion, 63
- Kreuzprodukt, 170
- kritische Stelle, 154
- Kronecker, L., 119
- Kroneckersymbol, 119
- Krümmung, 168
- Krümmungskreis, 169
- Krümmungsvektor, 168
- Kugel, 30
- Kugelvolumen, 193
- Kurve
  - nach Bogenlänge parametrisierte, 168
  - orientierte, 167
  - stückweise glatte, 167
- Kurvenintegral, 198, 214
- Kutta, M.W., 268
  
- Lösungsmatrix, 249
- Lagrange, J.L., 110
- Lagrangescher Multiplikator, 161
- Landau, E., 208
- Landausymbol, 208
- Laplace, P.S., 146
- Laplace-Operator, 146
- Lebensdauer, 237
- Lebesgue, H., 89
- Legendre, A.-M., 124
- Legendre-Polynome, 124
- Leibniz, G.W., 24
- Leibniz-Kriterium, 24
- de L'Hospital, G.F.A., 72
- Lindelöf, E., 234
- von Lindemann, C.L.F., 46
- Liouville, J., 275
- Lipschitz, R.O.S., 48
- Lipschitz-Bedingung
  - globale, 234
  - lokale, 235

- 
- Lösung
    - asymptotisch stabile, 261
    - instabile, 261
    - maximale, 260
    - partikuläre, 250
    - stabile, 261
  - Logarithmus, 59, 77
  - logarithmus naturalis, 59
  - Lorenz-Attraktor, 270
  - Lotka, A.J., 247
  - Lotka-Volterra-System, 247
  - Lyapunov, A.M., 264
  - m*-Fläche, 171
  - Majorantenkriterium, 24, 187
  - Maß, 80, 178
    - bewegungsinvariantes, 194
    - Dirac-, 179
    - endliches, 179
    - Lebesgue-, 181
    - normales, 179
    - Punkt-, 179
    - $\sigma$ -endliches, 179
    - translationsinvariantes, 194
  - Maßraum, 179
  - Maßtensor, 204
  - maximale Lösung, 260
  - Maximum, 14
    - einer Funktion, 51
  - Menge, 3
    - abzählbare, 27
    - endliche, 27
    - konvexe, 158
    - leere, 3
    - sternförmige, 202
    - überabzählbare, 27
    - unendliche, 27
  - Mengen
    - äquivalente, 27
    - gleichmächtige, 27
  - Mengenlehre, 3
  - messbar, 178, 182
    - Borel-, 181, 182
  - Messraum, 178
  - Metrik, 29
    - diskrete, 30
  - Minimum, 14
    - einer Funktion, 51
  - Minkowski, H., 132
  - Minkowskische Ungleichung, 132
  - de Moivre, A., 63
  - de Moivresche Formeln, 63
  - monoton, 18
    - fallend, 18
    - streng, 18
    - wachsend, 18
  - de Morgan, A., 6
  - $\mu$ -fast überall, 179
  - $\mu$ -Nullmenge, 179
  - nablium, 141
  - Nagumo-Bedingung, 237
  - Nebenbedingung, 160
  - Negation, 5
  - Neumann, C., 275
  - neutrales Element, 13
  - Newton, I., 228
  - Normale, 169
  - Normalenvektor
    - äußerer, 209
  - Normalgleichung, 158
  - Nullfolge, 18
  - Nullform, 200
  - o. B. d. A., 24
  - Oberflächenintegral, 205
  - Oberintegral, 189
  - $\omega$ -Limesmenge, 261
  - ONS, 121
  - Operator
    - kompakter, 288
    - stetiger linearer, 138
  - Operatornorm, 138
  - Orbit, 257
  - orientierbar, 215
  - orientiert
    - gleich, 215
    - positiv, 215
  - Orientierung, 167, 172, 215
    - induzierte, 215

- Orthogonalsystem, 119  
 Orthonormalsystem, 119  
     vollständiges, 121  
  
 paarweise disjunkt, 177  
 Parallelepipiped, 203  
 Parallelogrammgleichung, 41  
 Parameterdarstellung  
     äquivalente, 172  
 Parseval des Chénés, M.-A., 121  
 Parsevalsche Gleichung, 121  
 Partialbruchzerlegung, 78  
 Partialsumme, 23  
 Partition, 80  
 Partition der Eins, 211  
 Peano, G., 7, 239  
 Pendel  
     lineares, 258  
     ungedämpftes, 229  
 Periode, 258  
 periodisch, 258  
 Pfaff, J.F., 198  
 Phasenkurve, 257  
 Phasenraum, 257  
 $\pi$ , 45  
 Picard, É., 234  
 Poincaré, H., 198  
 Polarkoordinaten, 148, 196  
 Polynom, 48  
 Portfolio-Optimierung, 163  
 Potenzmenge, 29  
 Potenzreihe, 58  
 Prinzip von Cavalieri, 192  
 Produkt  
     kartesisches, 5  
 Produktregel, 144  
 Pythagoras, 41  
  
 quadratische Form, 156  
     indefinite, 156  
     negativ (semi)definite, 156  
     positiv (semi)definite, 156  
 quadratisches Mittel, 124  
 Quelle, 258  
 Quotientenkriterium, 25  
  
 Räuber-Beute-Modell, 247, 263, 269  
 Rand  
     glatter, 208  
 Randbedingung  
     Dirichletsche, 277, 291  
     Neumannsche, 291  
 Randoperator, 274  
 Randwertaufgabe, 273  
     Dirichletsche, 275  
     Neumannsche, 275  
     Sturm & Liouvillesche, 275, 280  
 Randwerte  
     homogene, 274  
 Raum  
     metrischer, 29  
 Raum aller Normalenvektoren, 209  
 Realteil, 15  
 Regel von de L'Hospital, 72  
 Regelfunktion, 83, 99  
 Regeln von de Morgan, 6  
 Reihe, 23  
     divergente, 23  
     geometrische, 23  
     harmonische, 23  
     konvergente, 23  
     Potenz, 103  
 Relation, 8  
     Äquivalenz-, 8  
     antisymmetrische, 8  
     reflexive, 8  
     symmetrische, 8  
     transitive, 8  
 Restglied, 110  
     Lagrangesche Form, 110  
 Restriktion, 5  
 Retraktion, 222  
 Riccati, J.F., 244  
 Richtungsableitung, 145  
 Richtungsfeld, 230  
 Riemann, B., 98  
 Riemannsches Zetafunktion, 25, 57  
 Römer, 43  
 Rolle, M., 68  
 Rotation, 146  
 Rotationsfläche, 172, 205

- 
- Runge, C., 268  
 Runge-Kutta-Verfahren, 268  
  
 Sägezahnfunktion, 127  
 Sattel, 259  
 Satz  
   von Arzelà & Ascoli, 238  
   von Peano, 239  
   Abelscher Grenzwertsatz, 104  
   Banachscher Fixpunktsatz, 31, 234  
   Brouwerscher Fixpunktsatz, 223  
   Cauchy & Schwarzsche Ungleichung, 40  
   Gaußscher Integralsatz, 211  
   Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, 88  
   Identitätssatz für Potenzreihen, 108  
   Lemma von Fatou, 188  
   Lemma von Gronwall, 236  
   Mittelwertsatz der Differentialrechnung, 69, 148  
   Mittelwertsatz der Integralrechnung, 86  
   über implizite Funktionen, 220  
   über lokale Umkehrbarkeit, 217  
   von Arzelà & Ascoli, 288  
   von Bolzano & Weierstraß, 34, 134  
   von Fubini, 192  
   von Lebesgue über majorisierte Konvergenz, 189  
   von Lebesgue über monotone Konvergenz, 188  
   von Picard & Lindelöf, 234  
   von Poincaré & Bendixson, 266  
   von Rolle, 68  
   von Schwarz, 151  
   von Stokes im  $\mathbb{R}^3$ , 214  
   von Stokes im  $\mathbb{R}^2$ , 214  
   von Taylor, 109, 153  
   von Tonelli, 191  
   Weierstraßscher Approximationssatz, 114  
   Zwischenwertsatz, 52, 137  
 Schmidt, E., 123  
 Schmiegebene, 168  
 Schranke, 14  
 Schwarz, H.A., 40, 151  
 Schwingung  
   gedämpfte, 264  
 Schwingungsdauer, 229  
 Sexagesimalsystem, 43  
 $\sigma$ -Additivität, 178  
 $\sigma$ -Algebra, 178  
   Borel-, 180  
   Spur-, 179  
 singulärer Punkt, 257  
 Sinus, 49, 60  
 sinus hyperbolicus, 63  
 Skalarprodukt, 40, 119  
 Spaltenvektor, 131  
 Spat, 203  
 Sprungfunktion, 47  
 Sprungstelle, 48  
 Spurmaß, 179  
 stabil, 261  
 Stammfunktion, 70, 75, 200  
 Standard-Normalverteilung, 197  
 Stellenwertsystem, 43  
 Stereografische Projektion, 173  
 stetig  
   gleichgradig, 237  
   gleichmäßig gleichgradig, 238  
   partiell, 136  
 stetige Abhängigkeit von den Daten, 241  
 stetige Ergänzung, 50  
 Streifen, 233  
 Stufenfunktion  
   Riemann-, 189  
 Sturm, J.-C.-F., 275  
 Substitutionsregel, 76  
 Supremum, 14  
   einer Funktion, 51  
 Supremumsnorm, 80  
 System  
   determiniertes, 227  
   differenzierbares, 228

- endlich-dimensionales, 227
- Systeme
  - homogene, 248
  - inhomogene, 250
  - lineare, 248
  - mit konstanten Koeffizienten, 252
- Tangente, 169
- Tangenteneinheitsvektor, 165
- Tangentensteigung, 65, 69
- Tangentialraum, 171, 208
- Tangentialvektor, 208
- Taylor, B., 70
- Taylorformel, 109, 110, 154
- Taylorpolynom, 110
- Taylorreihe, 70, 154
- Teilfolge, 19
- Teilmenge, 4
- Teilüberdeckung
  - endliche, 84
- Teleskopsumme, 110
- tertium non datur, 5, 6
- Tonelli, L., 191
- Torsion, 171
- Trägheitsmoment, 194
- Trajektorie, 257
- Transformationsatz, 196
- Treppenfunktion, 80
  
- Umkehrabbildung, 5, 54
- Unterintegral, 189
- Urbild, 4
  
- Variation der Konstanten, 250
- Vektorfeld, 197, 258
- Vektorraum, 39
- Vereinigungsmenge, 4
- Verhulst, P.-F., 247
- Verkettung, 5
- Verknüpfung, 5
- Vervollständigung, 20, 30
- vollständig, 30
- vollständig geordnet, 8
- vollständige Induktion, 9
- Vollständigkeitsaxiom, 14
  
- Volterra, V., 247
- Volumen, 177
- VONS, 121
  
- Wachstum
  - beschränktes, 247
  - exponentielles, 247
  - logistisches, 247
  - unbegrenztes, 247
- Wachstumsmodelle, 247
- Wahrheitstafel, 5
- Wahrheitswert, 5
- Wahrscheinlichkeitsdichte, 197
- Wahrscheinlichkeitsmaß, 179
- Weg, 137
  - äquivalenter, 167
  - differenzierbarer, 165
  - glatter, 165
  - stückweise glatter, 165
- Wegintegral, 246
- Weglänge, 166
- wegzusammenhängend, 137
- Wegzusammenhang, 137
- Weierstraß, K.T.W., 34
- Wendepunkt, 111
- Wertebereich, 4
- Wertemenge, 4
- Windung, 171
- wohlgeordnet, 8
- Wohlordnungssatz, 9
- Wronski, J.-M., 249
- Wronski-Determinante, 249, 280
- Wurzelkriterium, 25
  
- Young, W.H., 133
- Youngsche Ungleichung, 133
  
- Zählmaß, 179
- Zahl
  - algebraische, 46
  - ganze, 3
  - irrationale, 44
  - komplexe, 15
  - konjugiert komplexe, 15
  - natürliche, 3, 7

rationale, 3, 12  
reelle, 3, 14  
transzendente, 46  
Zahlenfolge, 17  
Zeilenvektor, 131  
zusammenhängend, 137  
Zusammenhang, 137  
Zustandsraum, 257  
Zwischenwerteigenschaft, 69  
Zylinderfunktion, 245

