Merkblätter zur Vorlesung Funktionentheorie

Sommersemester 2008

Prof. Dr. Reinhard Racke

Inhaltsverzeichnis

16 Funktionentheorie

16.1 Einleitung

Wir betrachten in diesem Kapitel Funktionen einer komplexen Veränderlichen mit Werten in $\mathbb{C}$, d.h.

$$f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ U \text{ offen}$$

Dabei sind solche Funktionen f komplex differenzierbar in $z_0 \in \mathbb{C}$ sein, falls

$$\exists f'(z_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \quad (h \in \mathbb{C})$$

Komplexwertige Funktionen lassen sich auch als Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ interpretieren.
Wir verwenden ab sofort folgende Darstellungen:

$$\mathbb{C} \ni z = x + iy \qquad f(z) = a + ib, \qquad h = h_1 + ih_2$$

Damit ergibt sich

$$f(z+h) - f(z) = f'(z)h + Rf = (a+ib)(h_1 + ih_2) + R_f = (ah_1 - bh_2) + i(ah_2 + bh_1) + Rf$$

$$= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + R_f$$

Andererseits ist $f = u + iv = u(x,y) + iv(x,y)$

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f((x,y) + (h_1, h_2)) - f(x,y) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + r_f$$

Für Differenzierbarkeit ist daher notwendig:

$$\boxed{u_x = v_y \qquad v_x = -u_y}$$

Dies sind die sog. *Cauchy–Riemann–Differentialgleichungen.*

<u>Anderer Zugang</u>

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

kann über

$$x = \frac{1}{2}(z + \overline{z}),\ y = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}),\ (x,y) = \phi(z, \overline{z})$$

geschrieben werden als

$$g(x,y) = f(z, \overline{z})$$

d.h. es sollte gelten:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$$

$$\Rightarrow 0 \overset{!}{=} g_x \frac{\partial \phi_1}{\partial \overline{z}} + g_y \frac{\partial \phi_2}{\partial \overline{z}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(g_x + ig_y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overline{\partial} g = 0, \qquad \overline{\partial} := \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$$

$$g = \binom{u}{v} = u + iv: \ \frac{1}{2}(u_x + iu_y + i(v_x + iv_y)) = 0$$

$$\Leftrightarrow u_x - v_y + i(u_y + v_x) = 0$$

$$\Leftrightarrow u_x = v_y \wedge u_y = -v_x$$

Dies sind wieder die Cauchy–Riemann–Differentialgleichungen.

Genügen u und v diesen Gleichungen, so ist

$$u_{x_x} + u_{y_y} = 0$$

$$v_{x_x} + v_{y_y} = 0$$

$$\text{d.h.: } \ \Delta u = \Delta v = 0$$

Beispiele 16.1.1.

1. $g(x, y) = (x, y) \mathrel{\hat{=}} f(z) = z$

$$\overline{\partial} g = 0, \ f'(z) = 1$$

2. $g(x, y) = (x, -y) \mathrel{\hat{=}} f(z, \overline{z}) = \overline{z}$

$$\overline{\partial} g = 1: \ \textit{nicht komplex differenzierbar}$$

denn: $f(z) := \overline{z}, \ z_0 = 0, \ h = re^{i\phi}$

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{re^{-i\phi}}{re^{i\phi}}$$

$$e^{-2i\phi} = \begin{cases} 1 & \phi = 0 \\ -1 & \phi = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

d.h. der Differenzenquotient existiert nicht.

16.2 Holomorphe Abbildungen

Wir betrachten in diesem Abschnitt wieder Funktionen

$$f: U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \ U \text{ offen}$$

$$z \mapsto w = f(z), \ z = x + iy, \ w = u + iv$$

Definition 16.2.1.

Sei $U \subset \mathbb{C}$ *offen,* $z_0 \in U$*.*

Dann ist f (komplex) differenzierbar *in* z_0*, falls*

$$\lim_{h \to 0; h \neq 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \equiv f'(z_0) \equiv \frac{df}{dz}(z_0) \qquad (h \in \mathbb{C})$$

existiert.

$f'(z_0)$ *heißt* „erste Ableitung“ *von* f *in* z_0*.*

Es gelten die üblichen Rechenregeln:

$$(\alpha f + g)' = \alpha f' + g' \text{ für } \alpha \in \mathbb{C}$$
$$(fg)' = f'g + fg'$$
$$\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}$$
$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$$

Beispiele 16.2.2.

1. $f(z) = z^n, \quad n \in \mathbb{N}$

$$\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + z_0^{n-1} \xrightarrow{z \to z_0} n z_0^{n-1}$$
$$\Rightarrow f'(z) = nz^{n-1}$$

2. $f(z) := Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$

$$z_0 := 0: \quad \frac{f(z)}{z} = \frac{x}{x + iy} = \frac{x^2 - ixy}{x^2 + y^2} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x = 0, y \to 0 \\ 1 & y = 0, x \to 0 \end{array} \right\}$$

d.h. f *ist nicht komplex differenzierbar in* $z_0 = 0$.

Definition 16.2.3.

$$f : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \; U \subset D, \; U \text{ offen}, \; z_0 \in U$$

f *heißt* holomorph in z_0, *falls* f *in einer Umgebung von* z_0 *komplex differenzierbar ist.*

f *heißt* holomorph in U, *falls* f *in jedem* $z_0 \in U$ *holomorph ist.*

Beispiele 16.2.4.

1. $f(z) = z^n$ *ist holomorph in* $\mathbb{C}$

2. $f(z) = |z|^2 = z\overline{z}$:

   f *ist differenzierbar in* $z_0 = 0$, *weil*

$$\frac{f(h)}{h} = \frac{|h|^2}{h} = \overline{h} \xrightarrow{h \to 0} 0.$$

   Aber sonst nirgends, da:

$$\begin{aligned} z_0 \neq 0: \quad & \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \\ &= \frac{(z_0 + h)(\overline{z}_0 + \overline{h}) - z_0\overline{z}_0}{h} \\ &= \frac{z_0\overline{h} + \overline{z}_0 h + h\overline{h}}{h} \\ &= z_0 \cdot \underbrace{\frac{\overline{h}}{h}}_{\text{Limes ex. nicht}} + \underbrace{\overline{z}_0 + \overline{h}}_{\to \overline{z}_0} \end{aligned}$$

Satz 16.2.5.

Sei f eine holomorphe Funktion

$$f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f = u + iv$$

$\Rightarrow u, v$ *genügen den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:* $u_x = v_y,\ u_y = -v_x$

Beweis.

Sei $h \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(z) \quad &\overset{h\to 0}{\longleftarrow} \quad \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h} + i\frac{v(x+h,y)-v(x,y)}{h} \\ &\overset{h\to 0}{\longrightarrow} \quad u_x(x,y) + iv_x(x,y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(z) \quad &\overset{h\to 0}{\longleftarrow} \quad \frac{f(z+ih)-f(z)}{ih} = \frac{u(x,y+h)-u(x,y)}{ih} + i\frac{v(x,y+h)-v(x,y)}{ih} \\ &\overset{h\to 0}{\longrightarrow} \quad -iu_y(x,y) + v_y(x,y) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u_x(x,y) = v_y(x,y) \ \wedge \ v_x(x,y) = -u_y(x,y)$$

Q.E.D.

Folgerung 16.2.6.

$f' = 0$ *in* $U \ \Rightarrow \ f = const.$

Beweis.

$$\begin{aligned} f' = 0 \quad &\Rightarrow \quad u_x + iv_x = 0 = v_y - iu_y \\ &\Rightarrow \quad \nabla_{(x,y)}u = 0 = \nabla_{(x,y)}v \\ &\Rightarrow \quad u = const.,\ v = const. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Satz 16.2.7.

$f = u + iv$

u, v seien (reell) partiell stetig differenzierbar und es möge gelten: $\bar{\partial} f = 0$ (d.h. es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen)

$\Rightarrow f$ *holomorph*

Beweis.

Mit $z = x + iy \hat{=} (x,y) = \vec{z}$ und $f((x,y)) = u(x,y) + iv(x,y)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} &= \frac{u(\vec{z})-u(\vec{z}_0)+i(v(\vec{z})-v(\vec{z}_0))}{z-z_0} \\
&= \frac{(\vec{z}-\vec{z}_0)\nabla u(\vec{z}_0)+i(\vec{z}-\vec{z}_0)\nabla v(\vec{z}_0)}{z-z_0} + \frac{r_{u,v}(\vec{z},\vec{z}_0)|\vec{z}-\vec{z}_0|}{z-z_0} \\
&= \frac{x-x_0}{z-z_0}(u_x(\vec{z}_0)+iv_x(\vec{z}_0)) + \frac{y-y_0}{z-z_0}(\underbrace{u_y(\vec{z}_0)}_{-v_x}+i\underbrace{v_y(\vec{z}_0)}_{u_x}) + \frac{r_{u,v}(\vec{z},\vec{z}_0)|\vec{z}-\vec{z}_0|}{z-z_0} \\
&= (u_x(\vec{z}_0)+iv_x(\vec{z}_0))\underbrace{\left(\frac{x-x_0+i(y-y_0)}{z-z_0}\right)}_{=1} + \underbrace{r_{u,v}(\vec{z},\vec{z}_0)}_{\to 0}\underbrace{\frac{|\vec{z}-\vec{z}_0|}{z-z_0}}_{|\cdot|=1} \\
&\overset{z\to z_0}{\longrightarrow} u_x(\vec{z}_0)+iv_x(\vec{z}_0) \qquad (= f'(z_0))
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Beispiele 16.2.8.

1.

$$P_n(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j \ \in C^\infty,\ a_j \in \mathbb{C},\ \textit{ist in } \mathbb{C} \textit{ holomorph}$$

2.

$$\begin{aligned}
f(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n,\ a_n \in \mathbb{C},\ \textit{Potenzreihe} \\
a &:= \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \\
\rho &:= \frac{1}{a} \quad (\textit{Konvergenzradius}) \ = \begin{cases} 0 & \textit{für } a = \infty \\ \frac{1}{a} & \textit{für } 0 < a < \infty \\ \infty & \textit{für } a = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

In $B(z_0,\rho) = \{z \in \mathbb{C} |\ |z-z_0| < \rho\}$ konvergiert die Reihe absolut und gleichmäßig und ist aus C^∞, z.B.:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} : \quad \textit{e-Reihe} \\
&=: e^z, \qquad f \in C^\infty(\mathbb{C})
\end{aligned}$$

speziell:

$$
\begin{aligned}
& f(iz) = e^{iz} = \cos z + i \sin z \\
\textit{mit:} \quad & \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \\
& \sin z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \\
\textit{damit:} \quad & \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \\
& \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \\
& \cosh z = \cos(iz) = \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z}) \\
& \sinh z = \frac{1}{i}\sin(iz) = \frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z})
\end{aligned}
$$

16.3 Integration

Γ sei eine stückweise stetig differenzierbare Kurve in $\mathbb{C}$, $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Parametrisierung dieser, mit $t \mapsto \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$. Es sei $f = u + iv : \ \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig.
Gesucht ist der Wert des Integrals

$$\int_\Gamma f(z)dz$$

Sei dazu $[t_0 ... t_n]$ eine Partition von $[a,b]$, wobei ξ_n die Feinheit der Partition sei. Für das gesuchte Integral folgt

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\gamma(\hat{t_i}))(\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)) \overset{|\xi_n| \to 0}{\longrightarrow} \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

mit einer Zwischenstelle $\hat{t}_i \in [t_i, t_{i+1}]$.
Es wird definiert:

$$\mathbb{C} \ni \int_\Gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Betrachtet wird nun $\Gamma = \partial G$, G glatt, f differenzierbar, f' stetig.

$$
\begin{aligned}
\oint_\Gamma f(z)dz &= \int_a^b (u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t)))(\gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t))dt \\
&= \int_a^b u(\gamma(t)) \cdot \gamma_1'(t) - v(\gamma(t))\gamma_2'(t)dt + i\int_a^b v(\gamma(t))\gamma_1'(t) + u(\gamma(t))\gamma_2'(t)dt \\
&= \int_a^b \left(u(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma_1'(t)}{|\gamma'(t)|} - v(\gamma(t))\frac{\gamma_2'(t)}{|\gamma'(t)|}\right)|\gamma'(t)|dt + i\int_a^b \left(v(\gamma(t))\frac{\gamma_1'(t)}{|\gamma'(t)|} + u(\gamma(t))\frac{\gamma_2'(t)}{|\gamma'(t)|}\right)|\gamma'(t)|dt
\end{aligned}
$$

Wir können den Weg auch auffassen als

$$\gamma : \ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

Außerdem gilt:

$$\vec{n}(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} -\gamma_2' \\ \gamma_1' \end{pmatrix} \frac{1}{|\gamma'|}$$

Damit:

$$\begin{aligned}
\oint_\Gamma f(z)dz &= \int_\Gamma \langle \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}, \vec{n}\rangle ds + i\int_\Gamma \langle \begin{pmatrix} -u \\ v \end{pmatrix}, \vec{n}\rangle ds \\
&\overset{\text{Gauß}}{=} \int_G \underbrace{v_x + u_y}_{=0} + i\int_G \underbrace{-u_x + v_y}_{=0} = 0
\end{aligned}$$

Beispiele 16.3.1.

1. $\gamma : [a,b] \longrightarrow \Gamma,\ \gamma(a) = A,\ \gamma(b) = B$

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma 1dz &= \int_a^b \gamma'(t)dt \\
&= \int_a^b \gamma_1'(t)dt + i\int_a^b \gamma_2'(t)dt = B - A
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma zdz &= \int_a^b \gamma(t)\gamma'(t)dt = \int_a^b \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\left(\gamma(t)\right)^2 dt \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b \frac{d}{dt}(\gamma(t))^2 dt = \frac{1}{2}\Big(\gamma^2(b) - \gamma^2(a)\Big) \\
&= \frac{B^2}{2} - \frac{A^2}{2}
\end{aligned}$$

3. $\Gamma = \partial B(z_0, r) =: S^1(z_0, r),\ z_0 \in \mathbb{C},\ r > 0$

   Gesucht ist:

$$\int_\Gamma (z - z_0)^n dz, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

   Mit $\gamma :\ [0, 2\pi] \longrightarrow \Gamma :\ \gamma(\phi) := z_0 + re^{i\phi}$ *folgt:*

$$\begin{aligned}
\oint_\Gamma (z - z_0)^n dz &= \int_0^{2\pi} r^n e^{in\phi} ire^{i\phi} d\phi \\
&= ir^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\phi} d\phi \\
&= \begin{cases} r^{n+1}2\pi i & n = -1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Hilfssatz 16.3.2.

$U \subset \mathbb{C}$ offen, $\Gamma \subset U$ Kurve mit Länge L, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig:

$$M := \max_{z\in\Gamma} |f(z)| \Rightarrow \Big|\int_\Gamma f(z)dz\Big| \leq L \cdot M$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\Big|\int_\Gamma f(z)dz\Big| &= \Big|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\Big| \\
&\leq \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt \\
&\leq M\int_a^b |\gamma'(t)|dt = ML
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Definition 16.3.3.

(i) *$U \subset \mathbb{C}$ offen, $f:\ U \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann heißt F* Stammfunktion *zu f, falls $F' = f$.*

(ii) *f besitzt eine* lokale Stammfunktion*, falls es zu jedem $z \in U$ eine Umgebung gibt, in der f eine Stammfunktion besitzt.*

Satz 16.3.4.

$U \subset \mathbb{C}$ offen, $f:\ U \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig, F Stammfunktion zu f.

$\Gamma := \Gamma(A,B)$ stückweise stetig differenzierbarer Weg in U mit Endpunkten A und B

$$\Rightarrow \int_{\Gamma(A,B)} f(z) = F(B) - F(A)$$

Beweis.

$$\Gamma := \Gamma_1 + \ldots + \Gamma_m, \quad \gamma_i : [a_i, b_i] \longrightarrow \Gamma_i$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_{\Gamma(A,B)} f(z)dz &= \sum_{j=1}^{m} \int_{\Gamma_j} f(z)dz \\
&= \sum_{j=1}^{m} \int_{a_j}^{b_j} f(\gamma_j(t))\gamma_j'(t)dt \\
&= \sum_{j=1}^{m} \int_{a_j}^{b_j} \underbrace{F'(\gamma_j(t))\gamma_j'(t)}_{\frac{d}{dt}F(\gamma_j(t))} dt \\
&= \sum_{j=1}^{m} F(\gamma_j(b_j)) - F(\gamma_j(a_j)) = F(B) - F(A)
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Folgerung 16.3.5.

$f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig, f besitze eine Stammfunktion.

Dann gilt: $\forall \Gamma, \Gamma$ geschlossene Kurve:

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0$$

Bemerkung.

- Es sei dabei der Integrationsweg Γ - wie auch im Folgenden - stückweise stetig differenzierbar.
- Ein Gebiet ist eine offene und (weg-)zusammenhängende Menge.

Satz 16.3.6.

$G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f:\ G \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig. Für alle geschlossenen Integrationswege $\Gamma \subset G$ gelte:

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0.$$

Dann besitzt f eine Stammfunktion.

Beweis.

Sei $A \in G$ fest (beliebig), $\Gamma(A,z)$ ein Weg von A nach $z \in G$,

$$F(z) := \int_{\Gamma(A,z)} f(\xi)d\xi.$$

$$\int_{\Gamma_1 - \Gamma_2} f \overset{\text{Vor.}}{=} 0 \;\Rightarrow\; \int_{\Gamma_1} f = \int_{\Gamma_2} f$$

Mit $\Gamma = \Gamma(A,z_0) + \overrightarrow{z_0 z} + \Gamma(z,A)$ folgt:

$$\begin{aligned}
&\oint_\Gamma f(z)dz = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & -F(z) + \int_{\overrightarrow{z_0 z}} f(\xi)d\xi + F(z_0) = 0 \\
\Rightarrow\quad & F(z) - F(z_0) = \int_{\overrightarrow{z_0 z}} f(\xi)d\xi = \int_0^1 f(z_0 + t(z-z_0))(z-z_0)dt \\
\Rightarrow\quad & \left| \frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} - f(z_0) \right| = \left| \int_0^1 f(z_0 + t(z-z_0)) - f(z_0)dt \right| \\
& \leq \sup_{0\leq t\leq 1} |f(z_0 + t(z-z_0)) - f(z_0)| \overset{z\to z_0}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \exists F'(z_0) = f(z_0)$$

Q.E.D.

16.4 Der Cauchysche Integralsatz

Satz 16.4.1 (Goursatsches Lemma)**.**

(*Edouard Jean-Baptiste Goursat, 21.5.1858-25.11.1936*)

Sei $\triangle$ ein abgeschlossenes Dreieck in $\mathbb{C}$, f holomorph in einer Umgebung von $\triangle$.

Dann gilt:

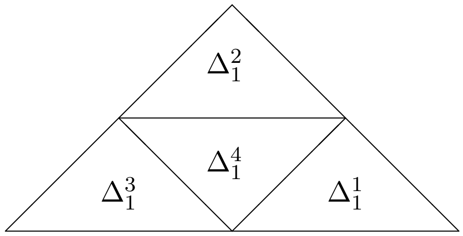
$$\int_{\partial\triangle} f(z)dz = 0.$$

Beweis.

Teilt man das Dreieck in vier kleinere Dreiecke $\triangle_1, \ldots, \triangle_4$ auf, so ist

$$\int_{\partial\triangle} f(z)dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\triangle_1^j} f(z)dz$$

$$\Rightarrow \left| \int_{\partial\triangle} f(z)dz \right| \leq 4 \max_j \left| \int_{\partial\triangle_1^j} f(z)dz \right|$$



Greife eines heraus, in dem das Maximum angenommen wird. Dieses sei

$$\triangle_1^j =: \triangle_1$$

Unterteile $\triangle_1$ analog $\rightarrow$ man erhält so eine Folge $\triangle,\ \triangle_1,\ \triangle_2, ...$, wobei gilt $\triangle \supset \triangle_1 \supset \triangle_2 \supset \dots$
mit

$$L(\partial\triangle_n) = \frac{1}{2} L(\partial\triangle_{n-1}) = \ldots = 2^{-n} L(\partial\triangle)$$

und

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\partial\triangle} f(z)dz\right| &\leq 4\left|\int_{\partial\triangle_1} f(z)dz\right| \\
&\leq 4^2\left|\int_{\partial\triangle_2} f(z)dz\right| \\
&\leq \ldots \leq 4^n\left|\int_{\partial\triangle_n} f(z)dz\right|
\end{aligned}$$

Die $\triangle_i$ bilden eine Intervallschachtelung:

$$\overset{1}{\exists}\, z_0 \in \mathbb{C} : \bigcap_{n=1}^{\infty} \triangle_n = \{z_0\}$$

Da f holomorph ist, gilt:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + g(z)(z - z_0) \qquad \text{mit } g(z) \rightarrow 0 \text{ für } z \rightarrow z_0$$

Damit:

$$\int_{\partial\triangle_n} f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)dz = 0 \quad \text{(siehe Beispiele)}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \left|\int_{\partial\triangle_n} f(z)dz\right| &= \left|\int_{\partial\Delta_n} (z - z_0)g(z)dz\right| \\
&\leq L(\partial\triangle_n) \underbrace{\sup_{z\in\partial\triangle_n} |z - z_0|}_{\leq L(\partial\triangle_n)} |g(z)| \\
&\leq (L(\partial\triangle_n))^2 \sup_{z\in\partial\triangle_n} |g(z)| \\
&= 4^{-n}(L(\partial\triangle))^2 \sup_{z\in\partial\triangle_n} |g(z)|
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall n : \left|\int_{\partial\triangle} f(z)dz\right| \leq (L(\partial\triangle))^2 \sup_{z\in\partial\triangle_n} |g(z)| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Q.E.D.

Bemerkung 16.4.2.

Man kann auf die Holomorphie von f (f stetig) in endlich vielen Punkten verzichten: f holomorph in $U \setminus \{z_1\},\ z_1 \in \triangle,\ \triangle \subset U$

a) Sei z_1 in einer Ecke. Unterteilung des Dreiecks wie oben.

$$\int_{\partial\triangle} f(z)dz = \int_{\partial\triangle_1} f(z)dz = \int_{\partial\triangle_2} f(z)dz = \ldots \to 0$$

b) Sei z_1 auf einer Seite des Dreicks. Unterteilung des Dreiecks in zwei Teildreiecke, so dass z_1 jeweils Eckpunkt der beiden Teildreiecke ist. Jetzt Anwenden von Fall *a).*

c) Sei z_1 im Inneren des Dreiecks. Unterteilung des Dreiecks in zwei Teildreiecke, so dass z_1 auf einer Seite der beiden Teildreiecke liegt. Dann Anwenden von Fall *b).*

Folgerung 16.4.3.

Sei G ein konvexes Gebiet, $f \in C(G, \mathbb{C})$ holomorph mit Ausnahme endlich vieler Punkte. Dann besitzt f eine Stammfunktion.

Beweis.

Die Behauptung folgt direkt aus dem Goursatschen Lemma und Satz 16.3.6 ($\Gamma = \partial\triangle$), da man auf konvexen Gebieten mit Dreiecken argumentieren kann. Q.E.D.

Satz 16.4.4 (Cauchyscher Integralsatz für konvexe Gebiete)**.**

$G \subset \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet, $f \in C(G, \mathbb{C})$, holomorph mit Ausnahme endlich vieler Punkte.

Γ sei ein geschlossener Integrationsweg

$$\Rightarrow \oint_\Gamma f(z)dz = 0$$

Beweis.

Nach voriger Folgerung 16.4.3 gibt es eine Stammfunktion. Mit Folgerung 16.3.5 gilt dann: $\oint_\Gamma f(z)dz = 0$. Q.E.D.

16.5 Die Cauchysche Integralformel

Wir zeigen die Cauchysche Integralformel zunächst für Kreisscheiben:

Satz 16.5.1.

$f: G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph

$z_0 \in G,\ r > 0$ mit $\overline{B(z_0, r)} \subset G$

$$\Rightarrow \ \forall z \in B(z_0, r): \ f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Beweis.

Sei $z \in B := B(z_0, r)$

$$\text{Sei } g(\zeta) := \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} & \zeta \neq z \\ f'(z) & \zeta = z \end{cases}$$

$\Rightarrow g \in C^0(B(z_0, r+\varepsilon))$ und g in $U \setminus \{z\}$ holomorph.

$$\begin{aligned} \overset{\text{CIS}}{\Rightarrow} 0 &= \oint_{\partial B} g(\zeta) d\zeta = \int_{\partial B} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \underbrace{\int_{\partial B} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta}_{\text{z.z. } = 2\pi i} \end{aligned}$$

Noch zu zeigen $\forall z \in B$:

$$\begin{aligned} h(z) &:= \int_{\partial B} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i \\ h'(z) &= \oint_{\partial B} \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^2} \end{aligned}$$

$$\zeta \mapsto \frac{1}{(\zeta - z)^2} \text{ ist stetig in } B \setminus \{z\} \text{ und hat Stammfunktion: } \zeta \mapsto -\frac{1}{\zeta - z}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \oint_{\partial B} \frac{1}{(\zeta - z)^2} d\zeta = 0 \\ &\Rightarrow h'(z) = 0 \\ &\Rightarrow h(z) = \text{const.} \\ &\Rightarrow h(z) = h(z_0) \overset{\text{s.o.}}{=} 2\pi i \end{aligned}$$

Q.E.D.

Folgerung 16.5.2.

Eine holomorphe Funktion ist beliebig oft differenzierbar.

Beweis.

In $B(z_0, r)$ gilt:

$$f(z) \overset{CIF}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

z liegt im Inneren der Kugel, daher keine Singularität und somit beliebig oft differenzierbar.

Deshalb:

$$\Rightarrow f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \Rightarrow ... \Rightarrow \exists f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

Q.E.D.

Satz 16.5.3 (Allgemeine Cauchysche Integralformel).

$G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $D \subset \overline{D} \subset G$ Gebiet mit stückweise glattem Rand

$$\Rightarrow \forall z \in D: \ f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Beweis.

Sei $z \in D,\ r > 0 :\ B(z, r) \subset D$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \overset{(*)}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \overset{CIF}{=} f(z)$$

Zu $(*)$:

$$U := D \setminus \overline{B(z, r)}$$

$$\Rightarrow \quad \int_{\partial U} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0$$
$$\Rightarrow \quad 0 = \int_{\partial U} \ldots = \int_{\partial D} \ldots - \int_{\partial B} \ldots$$

Q.E.D.

Also: Holomorphe Funktionen sind beliebig oft differenzierbar und über Kurvenintegrale darstellbar.

Eine Art Umkehrung des Goursatschen Lemmas ist der Satz von Morera:

Satz 16.5.4 (Satz von Morera).

(Giacinto Morera, 18.7.1856-8.2.1909)

f stetig in G. Für alle $\triangle \subset G$:

$$\oint_{\triangle} f(z) dz = 0 \ \Rightarrow \ f \text{ in } G \text{ holomorph}$$

Beweis.

Satz 16.3.6 $\Rightarrow$ f besitzt lokal eine Stammfunktion F mit $F'(z) = f(z)$, insbesondere ist F holomorph

$\Rightarrow F$ beliebig oft differenzierbar und daher $f = F'$ holomorph. Q.E.D.

Satz 16.5.5 (Riemannscher Hebbarkeitssatz).

$G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $z_0 \in G$, f holomorph in $G \setminus \{z_0\}$ und beschränkt in $B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$ für ein z_0 $(\varepsilon > 0)$.

Dann gibt es eine in G holomorphe Funktion $\hat{f}$ mit $\hat{f} \restriction G \setminus \{z_0\} = f$

Beweis.

$$F(z) := \begin{cases} (z - z_0) f(z) & z \in G \setminus \{z_0\} \\ 0 & z = z_0 \end{cases}$$

$\Rightarrow F$ holomorph in $G \setminus \{z_0\}$ und stetig in G

$\overset{16.4.3}{\Rightarrow}$ F besitzt eine lokale Stammfunktion

$\Rightarrow F$ holomorph in G.

$$F(z) = F(z_0) + (z - z_0)f(z)$$

andererseits:

$$F(z) = \underbrace{F(z_0)}_{=0} + (z - z_0)g(z) \quad \text{mit } \exists \lim_{z \to z_0} g(z) \quad (= F'(z_0))$$

$\Rightarrow$ in $G \setminus \{z_0\}$ gilt: $f(z) = g(z)$

$\Rightarrow \exists \lim_{z \to z_0} f(z)$

D.h. f stetig fortsetzbar zu $\hat{f}$ mit

$$z \mapsto \hat{f}(z) = \begin{cases} f(z) & z \neq z_0 \\ \lim_{z \to z_0} f(z) & z = z_0 \end{cases}$$

Da $\hat{f}$ eine Stammfunktion besitzt, ist $\hat{f}$ holomorph.

(später: „Residuenkalkül“)

Beispiele 16.5.6.

1. *$z \mapsto \frac{1}{z^2-1}$ hat nicht hebbare Singularität in $z = \pm 1$*

$$\begin{aligned} I_1 &:= \oint_{|z-\frac{1}{2}|=1} \frac{1}{z^2-1} dx \\ \Rightarrow I_1 &= \oint_{|z-\frac{1}{2}|=1} \frac{f(z)}{z-1} dz \ \textit{mit}\ f(z) := \frac{1}{z+1} \\ & \quad f \textit{ ist in } \overline{B\left(\frac{1}{2}, 1\right)} \textit{ holomorph} \\ \Rightarrow I_1 &\overset{CIF}{=} 2\pi i f(1) = \pi i \end{aligned}$$

2.

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx \quad (= \frac{\pi}{2})$$
$$B^+(0, R) := \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < R,\ Im(z) > 0\}$$

a)

$$\begin{aligned} \int_{\partial B^+(0,R)} \frac{1}{1+z^2} dz &= \int_{\partial B^+(0,R)} \frac{1}{(z+i)(z-i)} dz \\ &\overset{\forall \varepsilon > 0,\ CIS}{=} \int_{\partial B(i,\varepsilon)} \frac{1}{(z-i)(z+i)} dz \end{aligned}$$

Sei $z(\phi) = i + \varepsilon e^{i\phi}$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Damit:

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} \frac{1}{1+z^2} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{i\varepsilon e^{i\phi}}{(2i + \varepsilon e^{i\phi})\varepsilon e^{i\phi}} d\phi \\ &= i \int_0^{2\pi} \frac{1}{2i + \varepsilon e^{i\phi}} d\phi \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} \pi \end{aligned}$$

b)

$$\left|\int_{\{z|\ |z|=R;Im(z)>0\}} \frac{1}{1+z^2}dz\right| \leq \int_0^\pi \frac{R}{R^2-1}d\phi = \frac{\pi R}{R^2-1} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

c)

$$\int_{\{z=(x,0)|-R<x<R\}} \frac{1}{1+z^2}dz = \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^2}dx \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 2I_2$$

$$a), b), c) \Rightarrow I_2 = \frac{\pi}{2}$$

Bemerkung 16.5.7. *„2. a)“ wie in Beispiel 1.:*

$$\int_{\partial B^+(0,R)} \frac{1}{(z+i)(z-i)}dz = \int_{\partial B^+(0,R)} \frac{\frac{1}{z+i}}{z-i}dz = 2\pi i \cdot f(i) = \pi$$

16.6 Potenzreihenentwicklung

Satz 16.6.1 (über Potenzreihen)**.**

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, f in U holomorph, $z_0 \in U$ $\Rightarrow \exists$ Umgebung V von z_0 und $a_n \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}$ mit: $\forall z \in V:\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, wobei $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

Konvergenz (mindestens) im größten Kreis $B(z_0, r) \subset U$.

Beweis.

Sei $0 < r < R$ mit $B := B(z_0, R) \subset U$

$$\Rightarrow \forall z \in B:\ f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta - z_0}} \\
&\overset{\text{geom. Reihe}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \quad \text{falls } |z-z_0| < |\zeta - z_0| \text{ (z.B. } z \in B) \\
\Rightarrow f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial B} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n d\zeta \\
&\overset{\text{glm. Konv.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\right) d\zeta}_{\overset{15.5.2}{=}: a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}} (z-z_0)^n
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen sind die $(a_n)_n$ eindeutig.

Umkehrung: Eine Potenzreihe

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$$

ist im Konvergenzbereich holomorph (vgl. AI)

Beispiele 16.6.2.

1.

$$f(x) := \frac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R},\ f \in C^\infty$$

a) Taylorreihe um $x = 0$:

$1 - x^2 + x^4 - x^6 \pm$ *(siehe AI) hat Konvergenzradius* 1.

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} \text{ hat in } z = \pm i \text{ Singularitäten.}$$

b) Um $x = 1$:

Konvergenzradius: $\sqrt{2}$

2.

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{array} \right\},\ f \in C^\infty(\mathbb{R})$$

hat keine Taylorreihenentwicklung um $x = 0$.

$$f(z) = \left\{ \begin{array}{ll} e^{-\frac{1}{z^2}} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{array} \right\},\ z \in \mathbb{C}$$

hat Singularität in $z = 0$: Für $z = iy$: $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}} = e^{\frac{1}{y^2}} \to \infty$ *für* $y \to 0$

3.

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-2)}$$

Potenzreihenentwicklung um $z_0 = 0$

Mit Partialbruchzerlegung erhält man:

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{z-1} - \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{z-2} \\ &= \frac{1}{1-z} - \frac{d}{dz}\frac{1}{1-z} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} \\ &= \sum_{n=0}^\infty z^n - \sum_{n=0}^\infty n z^{n-1} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{2^n} z^n \\ &= \sum_{n=0}^\infty \left(1 - (n+1) - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n \end{aligned}$$

Also:

$$f(z) = -\sum_{n=0}^\infty \left(n + \frac{1}{2^n+1}\right) z^n$$

Konvergenzradius: 1.

Als Zusammenfassung die Grundlagen der Funktionentheorie:

Satz 16.6.3.

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:

1. *f ist holomorph.*

2. *f besitzt lokal eine Stammfunktion.*

3. *f ist reell stetig differenzierbar und erfüllt die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.*

4. *f ist um jedes $z_0 \in U$ in eine Potenzreihe entwickelbar.*

Definition 16.6.4.
Eine holomorphe Funktion f hat in z_0 eine Nullstelle der Ordnung n, *falls $f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$ und $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Sie nimmt in z_0 den Wert $w_0 \in \mathbb{C}$ mit der Ordnung n an, falls $z \mapsto f(z) - w_0$ in z_0 eine Nullstelle der Ordnung n hat. $n = \infty$ ist dabei zugelassen.*

Es gilt:

$$\begin{aligned}
& f \text{ hat Nullstelle der Ordnung } n \text{ in } z_0 \\
\Leftrightarrow \quad & f(z) = \sum_{j=n}^{\infty} a_j (z - z_0)^j, \ a_n \neq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & f(z) = (z - z_0)^n g(z) \text{ mit } g(z_0) = a_n \neq 0, \ g \text{ holomorph}
\end{aligned}$$

Satz 16.6.5 (Identitätssatz)**.**
f sei in Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind äquivalent:

1. $\forall z \in G : \ f(z) = 0$

2. *f besitzt eine Nullstelle der Ordnung ∞ in G*

3. $\exists z_0 \in G, \ (z_n)_{z_i \neq z_j, \ i \neq j, z_n \neq z_0} \longrightarrow z_0 : \ f(z_n) = 0$

Beweis.

3. $\Rightarrow$ 2.

$$f(z_0) = \lim_n f(z_n) = 0$$

$$\begin{aligned}
\text{In } U(z_0) : \qquad & f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j \\
& \Rightarrow a_0 = f(z_0) = 0 \\
& g(z) := \frac{f(z)}{z - z_0} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j+1} (z - z_0)^j \\
& g(z_n) = 0 \\
& \Rightarrow g(z_0) = 0 \\
& \Rightarrow a_1 = 0 \text{ usw.} \\
& \Rightarrow \forall j : \ a_j = 0 \\
& \Leftrightarrow \forall j : f^{(j)}(z_0) = 0
\end{aligned}$$

2. $\Rightarrow$ 1.

Sei $M := \{z \in G | \forall n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(z) = 0\}$. (Zeige: $M = G$)

Sei z_0 Nullstelle der Ordnung ∞.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow && z_0 \in M \\
&\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Potenzreihe um } z_0} && \exists U(z_0) \subset M \\
&\Rightarrow && M \text{ ist offen (in } G)
\end{aligned}$$

Ferner: M ist auch abgeschlossen in G, denn:

$$\begin{aligned}
& M \ni z_j \longrightarrow z_0 \text{ Häufungspunkt in } G \\
& \Rightarrow \forall n : f^{(n)}(z_j) = 0 \\
& \Rightarrow f^{(n)}(z_0) = 0 \\
& \Rightarrow z_0 \in M \\
& \Rightarrow M = G \text{ (da } G \text{ zusammenhängend)}
\end{aligned}$$

1. $\Rightarrow$ 3. Klar.

Q.E.D.

Beispiele 16.6.6.

1.

$$f(z) := \cot(\pi \cdot z) := \frac{\cos(\pi \cdot z)}{\sin(\pi \cdot z)}$$

ist in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ wohldefiniert ($z \mapsto \sin(\pi z)$ nur Nullstellen in $\mathbb{Z}$, denn die Nullstellen des Sinus sind im Komplexen dieselben wie im Reellen, siehe unten)

Es gilt: f ist periodisch mit der Periode 1 (in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$)

denn: $g(z) := f(z+1)$ stimmt in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ mit f überein (d.h.: $(g - f)$ hat in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ nur Nullstellen vom Grad ∞).

$\Rightarrow g = f$ in ganz $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ (Identitätssatz) $\Leftrightarrow$ f hat Periode 1

2. Die holomorphe Fortsetzung F einer reellen Funktion f,

$$f : V \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \; F : U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit $V \subset U$ und $F \restriction V = f$ ist eindeutig bestimmt. (Identitätssatz)

z.B.

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

16.7 Cauchysche Ungleichung und Folgerungen

Satz 16.7.1 (Cauchysche Ungleichung)**.**

f sei in einer Umgebung $\overline{B(z_0, r)}$ von z_0 holomorph. Dann gilt:

$$\forall \rho \in (0, r]\ \forall z \in \overline{B(z_0, r-\rho)} :\ |f^{(n)}(z)| \leq \frac{r \cdot n!}{\rho^{n+1}} \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|$$

Beweis.

$$f^{(n)}(z) \overset{CIF}{=} \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

$$r = |\zeta - z_0| \leq |\zeta - z| + |z - z_0| \leq |\zeta - z| + r - \rho$$

$$\Rightarrow \rho \leq |\zeta - z| \ \Rightarrow\ |f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{2\pi r}{\rho^{n+1}} \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|$$

Q.E.D.

Folgerung 16.7.2.

(i)

$$|f^{(n)}(z_0)| \underbrace{\leq}_{\rho = r} \frac{n!}{r^n} \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|$$

(ii)

$$\forall z \in \overline{B(z_0, \frac{r}{2})} : |f^{(n)}(z)| \underbrace{\leq}_{\rho = \frac{r}{2}} \frac{2^{n+1} n!}{r^n} \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|$$

(iii)

$$|a_n| = \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right| \overset{(i)}{\leq} \frac{1}{r^n} \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|$$

Satz 16.7.3 (von Weierstraß)**.**

$(f_n)_n$ holomorph in Gebiet G, lokal gleichmäßig konvergent gegen f

$\Rightarrow$ f holomorph und $(f_n^{(k)})_n$ konvergiert lokal gleichmäßig gegen $f^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$.

Beweis.

Aus Sätzen über gleichmäßige Konvergenz folgt, dass f stetig ist.

Sei $\triangle \subset G$ ein abgeschlossenes Dreieck.

$$\Rightarrow \oint_{\partial \triangle} f(z) dz = \lim_n \underbrace{\oint_{\partial \triangle} f_n(z) dz}_{=0 \text{ Lemma von Goursat}} = 0$$

Mit dem Satz von Morera folgt, dass f holomorph ist.

Sei $\overline{B(z_0, r)} \subset G$.

$$\underbrace{\Rightarrow}_{Cauchy.Unglg.} \quad |z - z_0| \leq \frac{r}{2} :\ |f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| \leq \frac{2^{n+1} k!}{r^k} \underbrace{\max_{|\zeta - z_0| = r} |f_n(\zeta) - f(\zeta)|}_{\to 0}$$

Q.E.D.

Zur Werteverteilung holomorpher Funktionen:

Hilfssatz 16.7.4.

f holomorph in einer Umgebung von $\overline{B(z_0,r)}$ mit $|f(z_0)| < \min_{|\zeta-z_0|=r}|f(\zeta)|$

$\Rightarrow$ f besitzt in $B(z_0,r)$ eine Nullstelle.

Beweis.

Annahme:

f besitzt in $B(z_0,r)$ keine Nullstelle. $\Rightarrow$ $g := \frac{1}{f}$ ist ebenfalls eine holomorphe Funktion in einer Umgebung von $\overline{B(z_0,r)}$, denn $\zeta \in \partial B(z_0,r) \Rightarrow |f(\zeta)| > 0$.

$$\begin{aligned}
&\overset{16.7.2\ (i)}{\Rightarrow} |g(z_0)| \leq \max_{|\zeta-z_0|=r} |g(\zeta)| \\
&\Rightarrow \left|\frac{1}{f(z_0)}\right| \leq \max_{|\zeta-z_0|=r} \frac{1}{|f(\zeta)|} = \frac{1}{\min_{|\zeta-z_0|=r} f(\zeta)} \\
&\Leftrightarrow |f(z_0)| \geq \min_{|\zeta-z_0|=r} |f(\zeta)|
\end{aligned}$$

Widerspruch. Q.E.D.

Satz 16.7.5 (Satz von der Gebietstreue)**.**

f im Gebiet G holomorph und nicht konstant, dann gilt:

$f(G)$ ist ein Gebiet.

Beweis.

Seien G Gebiet, f holomorph, $z_0,\ z_1 \in G,\ z_0 \neq z_1$. Damit sind $f(z_0),\ f(z_1) \in f(G)$.

Sei $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ ein Weg von z_0 nach z_1 in G ($\gamma(a) = z_0,\ \gamma(b) = z_1$).

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad f \circ \gamma :\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{C} \text{ ist Weg von } f(z_0) \text{ nach } f(z_1) \text{ in } f(G) \\
&\Rightarrow \quad f(G) \text{ wegzusammenhängend}
\end{aligned}$$

Zu zeigen: $f(G)$ ist offen.

Sei $w_0 = f(z_0) \in f(G)$.

$\exists\, r > 0$: In $\overline{B(z_0,r)} \subset G$ ist z_0 die einzige w_0–Stelle von f. (Identitätssatz)

$\Rightarrow$ $\exists\, \varepsilon > 0, \exists \varepsilon_1 > 0\ \forall z \in \partial B(z_0,\varepsilon) :\ |f(z) - w_0| \geq 3\varepsilon_1$

$\Rightarrow$ Für $w \in B(w_0,\varepsilon_1)$ folgt:

$$\text{für } z \in \partial B(z_0,\varepsilon) :\ |f(z) - w| \geq |f(z) - w_0| - |w - w_0| \geq 3\varepsilon_1 - \varepsilon_1 = 2\varepsilon_1$$

Für $z = z_0$:

$$\begin{aligned}
& && |f(z_0) - w| = |w_0 - w| \leq \varepsilon_1 \\
&\Rightarrow && |f(z_0) - w| < \min_{|z-z_0|=\varepsilon} |f(z) - w| \\
&\underbrace{\Rightarrow}_{\text{HS 16.7.4}} && z \mapsto f(z) - w \text{ besitzt eine Nullstelle in } B(z_0,\varepsilon) \subset G \\
& && \text{also: } \exists z_2 :\ f(z_2) = w,\ z_2 \in G \\
&\Rightarrow && B(w_0,\varepsilon_1) \subset f(G)
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Bemerkung: Insbesondere gilt, dass nicht konstante, holomorphe Funktionen offene Mengen auf offene Mengen abbilden.

Folgerung 16.7.6.
Holomorphe Funktionen mit konstantem Real- oder Imaginärteil sind konstant.

Satz 16.7.7 (Maximum-Prinzip)**.**
f in G holomorph $\Rightarrow$

1. *$|f|$ hat in $z_0 \in G$ lokales Maximum $\Rightarrow$ f konstant.*

2. *G beschränkt, f in $\overline{G}$ stetig*

$$\Rightarrow \forall z \in \overline{G} : |f(z)| \leq \max_{\zeta \in \partial G} f(\zeta)$$

Beweis.
Annahme:
$U(z_0) \subset G$ Umgebung, lokales Maximum in z_0:

$$\forall z \in U(z_0) : |f(z)| \leq |f(z_0)|$$

$$\Rightarrow f(U(z_0)) \subset \{w \in \mathbb{C} | |w| \leq |f(z_0)|\}$$

$\Rightarrow$ $f(U(z_0))$ ist nicht offen.
Widerspruch zur Gebietstreue. $\Rightarrow$ *(1.)*
$\Rightarrow$ *(2.)* Q.E.D.

Anwendung des Maximum-Prinzips auf $\frac{1}{f}$ liefert:

Satz 16.7.8 (Minimum-Prinzip)**.**
f in G holomorph. Dann folgt:

1. *$|f|$ hat in z_0 lokales Minimum $\Rightarrow f(z_0) = 0$ oder f konstant.*

2. *G beschränkt, f in $\overline{G}$ stetig,*

$$\Rightarrow \forall z \in \overline{G} : \ |f(z)| \geq \min_{\zeta \in \partial G} |f(\zeta)|$$

   oder f hat Nullstellen in G.

Beispiele 16.7.9.
$G := B(0,1), \ z = x + iy$

1. $f(z) = z^n$*: Maximum auf* ∂G*, Minimum in Nullstelle* $z_0 = 0$*.*

2. $f(z) = 2 + z \equiv 2 + x + iy$

$$\begin{aligned} |f(z)|^2 &= (2+z)\cdot(2+\bar{z}) \\ &= 4 + 4x + x^2 + y^2 = h(x,y) \end{aligned}$$

$$\nabla h = \begin{pmatrix} 4+2x \\ 2y \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow x = -2,\ y = 0$$

$$\textit{in } z_1 = (-2,0)\text{: } \nabla^2 h = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} :$$

Damit: lokales Minimum in $\mathbb{R}^2(\mathbb{C})$*, da* $\nabla^2 h$ *positiv definit.*

f *nicht konstant* $\Rightarrow$ *Maximum am Rand:*

$z_2 = 1 (= x)$ *mit* $f(z_2) = 0 + 3 = 3$

f *nirgends Null in* $\bar{G}$ $\Rightarrow$ *Minimum am Rand:*

$z_3 = -1$ *mit* $|f(z_3)| = 1$

$$g(x) = 4x + 5,\ x \in (-1,1) \text{ (folgt aus } x^2 + y^2 = 1 \text{ (Einheitskugel))}$$

Also Maximum in $x = 1$*, Minimum in* $x = -1$ *(*$y = 0$*)*

Bemerkung 16.7.10.

$U \subset \mathbb{C}$ offen, $f:\ U \to \mathbb{C}$ holomorph, $\overline{B(z_0,r)} \subset U$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta \stackrel{\zeta = z_0 + r\cdot e^{i\phi}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\phi}) d\phi \\ &\equiv M(f, z_0, r):\ \text{Mittelwert} \end{aligned}$$

$M(f, z_0, r)$ kann definiert werden für $f \in C^0(G,\mathbb{C})$ (nicht notwendigerweise holomorph!)
Gilt $M(f, z_0, r) = f(z_0)$, so sagt man: „f besitzt die Mittelwerteigenschaft“. Dann gilt schon das Maximum-Prinzip. (ohne Beweis)

16.8 Umkehrung holomorpher Funktionen

Wie im Reellen zeigt man:

Satz 16.8.1.

$U \subset \mathbb{C}$ *offen,* $f:\ U \longrightarrow \mathbb{C}$ *holomorph,* $z_0 \in U$ *mit* $f'(z_0) \neq 0$

$\Rightarrow \exists\, V \subset U$*, Umgebung von* z_0 *mit*

(i) $f \restriction V$ *ist bijektiv,* f^{-1} *holomorph*

(ii) $(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}$

Bemerkung 16.8.2.

Holomorphes f mit Eigenschaft (i) heißt *biholomorph.*

Satz 16.8.3.

$U \subset \mathbb{C}$ *offen,* $f: U \longrightarrow \mathbb{C}$ *holomorph, injektiv*

$\Rightarrow \forall z \in U: f'(z) \neq 0, \; V := f(U)$ *offen, d.h.:* f *biholomorph* $U \leftrightarrow V$

Bemerkung 16.8.4.

$\mathbb{R}^1: \; g: \; x \mapsto x^3$ umkehrbar, injektiv, g^{-1} nicht differenzierbar in $y = 0$, $g'(0) = 0$.

Skizze zum Satz 16.8.1

(i) $M =: N(f')$ kein Häufungspunkt ($N(f')$: Nullstellenmenge von f')

(ii) $f: U \setminus M \longrightarrow V \setminus M_1$ biholomorph ($M_1 = f(M)$)

(iii) $g = f^{-1}$, g stetig in V (dann Riemannscher Hebbarkeitssatz)

Beispiel 16.8.5.

$$
\begin{aligned}
&f(z) = e^z \qquad f(0) = 1 \\
&f'(z) = e^z \qquad f'(0) = 1 \\
&\Rightarrow f \textit{ lokal biholomorph}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\underbrace{g = f^{-1}}_{\textit{(lokal)}}: \; g'(w) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} = \frac{1}{w} \\
&= \frac{1}{1 + (w-1)} \underbrace{=}_{geom. Reihe} \sum_{n=0}^{\infty} (-(w-1))^n \textit{ für } |w-1| < 1 \\
&\quad (f: \; U(0) \to \mathbb{C}, \; g: \; U(1) \to \mathbb{C}) \\
g(w) &= w - 1 - \frac{(w-1)^2}{2} + \frac{(w-1)^3}{3} \mp \quad (=: \ln w)
\end{aligned}
$$

Bemerkung 16.8.6.

$$
z = x + iy: \qquad e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \neq 0 \qquad \text{immer}
$$

16.9 Spezielle Abbildungen

Sei $f: U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad z \mapsto f(z) = w$

$\gamma: [-\alpha, \alpha] \longrightarrow \Gamma \subset \mathbb{C}$ glatter Weg mit $\gamma(0) = z_0$

$t: [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}: \; s \mapsto t(s) := z_0 + s\gamma'(0)$ Halbtangente

Seien $\Gamma_1, \; \Gamma_2$ Wege mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0$, $\measuredangle(\gamma_1, \gamma_2)_{z_0} = \arg\left(\frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)}\right)$ (Schnittwinkel (orientiert)) denn: $\gamma_j'(0) = r_j e^{i\phi_j}$ $(j = 1,2)$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)} = \frac{r_2}{r_1} \cdot e^{i(\phi_2 - \phi_1)} \text{ bzw. } \arg\frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)} = \phi_2 - \phi_1$$

$$\measuredangle(f(\gamma_1), f(\gamma_2))_{f(z_0)} = \arg\left(\frac{f'(\gamma_1(0))\gamma_1'(0)}{f'(\gamma_2(0))\gamma_2'(0)}\right) = \measuredangle(\gamma_1, \gamma_2)$$

d.h. f holomorph $\Rightarrow f$ *winkeltreu*

Satz 16.9.1.

f holomorph in z_0 mit $f'(z_0) \neq 0$

$\Rightarrow$ f ist winkeltreu und orientierungstreu

Definition 16.9.2.

$f:\ U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt (lokal) konform*: $\Leftrightarrow$ f (lokal) injektiv, winkeltreu und orientierungserhaltend.*

Beispiel 16.9.3.

$$f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y),\ (z \in \mathbb{C}) \Rightarrow\ f \textit{ lokal konform}$$

$$V := \{w | \arg(w) \neq -\pi\} \setminus \{0\}$$

$$U := \{z | -\pi < Im(z) < \pi\}$$

$$f : U \to V \textit{ holomorph}$$

Eine Reihe spezieller Abbildungen

1. $f(z) = az + b, \qquad a = f'(z) \neq 0, \qquad a, b \in \mathbb{C}$

   $a = 1$: Parallelverschiebung

   $b = 0$: $f(z) = az,\ a = r_a \cdot e^{i\phi_a},\ z = r_z \cdot e^{i\phi_z}$

   $\Rightarrow f(z) = r_a r_z \cdot e^{i(\phi_z + \phi_a)}$ Drehstreckung (Streckung um r_a, Drehung um ϕ_a)

   für $|a| = 1,\ b = 0$: reine Drehung

   Geraden in $\mathbb{C}$ werden durch

   $(\triangle)$ $cz + \overline{cz} + \gamma = 0$ für ein $c \in \mathbb{C},\ \gamma \in \mathbb{R}$ beschrieben, denn:

   $(\triangle)$ $\Leftrightarrow Re(cz) + \frac{\gamma}{2} = 0;\ c = c_1 + ic_2,\ z = x + iy$

   $\Leftrightarrow c_1 x - c_2 y + \frac{\gamma}{2} = 0$

   Folgerung 16.9.4.

Geraden werden in Geraden überführt, denn: ($a \neq 0$)

$$
\begin{aligned}
&w = az + b \underbrace{\Rightarrow}_{z \in \text{ Gerade}} c\frac{w-b}{a} + \overline{c\frac{w-b}{a}} + \gamma = 0 \\
&\Rightarrow \; \frac{c}{a}w + \overline{\frac{c}{a}w} + \underbrace{\gamma - 2Re(\frac{cb}{a})}_{\in \mathbb{R}} = 0 \\
&\Rightarrow \; w \in \; \text{Gerade}
\end{aligned}
$$

Ebenso:

Kreise $\longrightarrow$ Kreise

Kreis um z_0:

$$
\begin{aligned}
& & |z - z_0|^2 = \delta^2 \quad (\delta \in \mathbb{R}) \\
&\Leftrightarrow & (z - z_0)\overline{(z - z_0)} = \delta^2 \\
&\Leftrightarrow & z\overline{z} - \overline{z}_0 z - z_0\overline{z} + z_0\overline{z}_0 = \delta^2 \; (\bigtriangledown) \text{ Kreisgleichung}
\end{aligned}
$$

Für $w = f(z) = az + b$ ($\Leftrightarrow z = \frac{w-b}{a}$)

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow & \left(\frac{w-b}{a} - z_0\right)\left(\overline{\frac{w-b}{a} - z_0}\right) = \delta^2 \\
&\Leftrightarrow & (w - (b + az_0))\overline{(w - (b + az_0))} = a\overline{a}\delta^2 = |a|^2\delta^2 \\
&\Leftrightarrow & |w - (b + az_0)|^2 = (|a|\delta)^2
\end{aligned}
$$

d.h. z auf Kreis um z_0 mit Radius δ.

$\Rightarrow w$ auf Kreis um $b + az_0$ mit Radius $|a| \cdot \delta$.

Nach ($\triangle$), ($\bigtriangledown$) wird die Menge aller Geraden und Kreise beschrieben durch:

$$
\alpha z\overline{z} + cz + \overline{cz} + \beta = 0 \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \; c \in \mathbb{C}) \tag{16.1}
$$

2. $f(z) = \frac{1}{z}$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow f(z) = \overline{\frac{1}{\overline{z}}} = (g \circ h)(z) = (h \circ g)(z) \\
&\text{mit } g(z) = \frac{1}{\overline{z}}, \; h(z) := \overline{z} \\
&z = r \cdot e^{i\phi} \overset{g}{\mapsto} \frac{1}{r} \cdot e^{i\phi}
\end{aligned}
$$

(Spiegelung am Einheitskreis)

$h(z) = \bar{z}$: Spiegelung an der reellen Achse

z	$w = f(z)$
0	∞
∞	0
$\partial B(0,r)$	$\partial B(0,\frac{1}{r})$
Gerade durch 0	Gerade durch 0
Kreis nicht um 0	Kreis nicht um 0
Kreis nicht durch 0	Kreis nicht durch 0
Gerade nicht durch 0	Kreis durch 0

Allgemein:

z mit (16.1), $w = \frac{1}{z}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \alpha\frac{1}{w\overline{w}} + c\frac{1}{w} + \overline{c}\frac{1}{\overline{w}} + \beta = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha + c\overline{w} + \overline{c}w + \beta w\overline{w} = 0 \\ &\Rightarrow \quad \text{Kreis-Geraden-Verwandtschaft} \end{aligned}$$

Nun ist es sinnvoll $\mathbb{C}$ zu erweitern: $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$f(0) := \infty,\ f(\infty) := 0$, dann: $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$

Erinnerung:

Stereographische Projektion:

$$p:\ S^2_{(=\{x\in\mathbb{R}^3|\ |x|=1\})} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}} \qquad x \mapsto \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}\right)$$

p ist winkeltreu und kreisverwandt (ohne Beweis)

„kreisverwandt“: {Gerade, Kreis}$\longrightarrow${Gerade, Kreise}.

offene Mengen in $\hat{\mathbb{C}}$: = (offene Mengen in $\mathbb{C}$) $\cup$ (Mengen der Form $\mathbb{C} \setminus \overline{K},\ K \subset \mathbb{C}$, $\overline{K}$ Kompaktum) $\equiv$ (offene Mengen in $\mathbb{C}$) $\cup$ („Umgebungen von ∞“)

Das Verhalten von $f : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ in $z = \infty$ wird charakterisiert durch das Verhalten von $z \mapsto f(\frac{1}{z})$ nahe $z = 0$.

Beispiel 16.9.5.

$f(z) = \frac{1}{z}$ *mit* $f(0) = \infty,\ f(\infty) = 0$

$f :\ \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$*;* $f(\frac{1}{z}) = z$*: in* $z_0 = 0$ *holomorph, ergo:* f *in* $z = \infty$ *holomorph. Der Wert* 0 *wird in* ∞ *in erster Ordnung angenommen.*

3. $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $|c| + |d| \neq 0$

   für $c = 0$: $f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ (Fall 1)

   für $c \neq 0: f(z) = \frac{1}{c}\left\{a + \frac{bc-ad}{cz+d}\right\}$.

   d.h. f zusammengesetzt aus Abbildungen vom Typ 1 oder Typ 2.

   Also ist f *kreisverwandt*.

   $ad = bc \;\Rightarrow\; f = \text{const}$.

$$\text{Sei } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

   mit $\det A = ad - bc \neq 0$.

   Dann heißt f *Möbiustransformation*

   (August Ferdinand Möbius, 17.11.1790-26.9.1868)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix};\; w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

$$\begin{aligned} g(w) &= \frac{dw-b}{-cw+a} = \frac{d\frac{az+b}{cz+d} - b}{-c\frac{az+b}{cz+d} + a} \\ &= \frac{adz + bd - bcz - bd}{-acz - bc + acz + ad} = \frac{adz - bcz}{-bc + ad} = z \end{aligned}$$

   analog: $f(g(w)) = w$, d.h. $g = f^{-1}$: Die Inverse ist auch Möbiustransformation.

   $f:\ \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ bijektiv

$$f_1 \hat{=} A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix},\; f_2 \hat{=} A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

   $\Rightarrow\; f_1 \circ f_2 \hat{=} A_1 \cdot A_2$: Möbiustransformation.

   Fixpunkte:

$$f \hat{=} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

   - $f = \text{id}$, d.h.: $f \hat{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: jeder Punkt $z \in \mathbb{C}$ ist Fixpunkt.
   - $f \neq \text{id}$:
     - für $c = 0$: $f(z) = \frac{az+b}{d} \stackrel{!}{=} z$ erfüllt für $(d-a)z = b$
       * für $d \neq a$: $z = \frac{b}{d-a}$ genau ein Fixpunkt.
       * für $d = a$: kein Fixpunkt für $b \neq 0$.
       * für $d = a$: $b = 0$: $f = \text{id}$ (siehe oben)

- für $c \neq 0$:

$$\begin{aligned}
f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \stackrel{!}{=} z \quad &\Leftrightarrow \quad (az+b) = z(cz+d) \\
&\Leftrightarrow \quad z^2 + \frac{d-a}{c} z - \frac{b}{c} = 0 \\
&\Rightarrow \quad z_{1,2} = \frac{a-d}{2c} \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc} \cdot \frac{1}{2c} \\
&\qquad\;\; = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2c} : \text{ maximal zwei Fixpunkte}
\end{aligned}$$

Bemerkung 16.9.6.

$z \in \mathbb{C},\ z = re^{i\phi};\ \sqrt{z} := \sqrt{r} e^{\frac{i\phi}{2}}$

Sind $f_1,\ f_2$ zwei Möbiustransformationen mit $f_j(z_k) = w_k,\ k = 1,2,3\ (j = 1,2)$ mit $z_1 \neq z_2 \neq z_3 \neq z_1$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \underbrace{f_2^{-1} \circ f_1}_{\text{hat 3 FP}}(z_k) = z_k \\
&\Rightarrow \quad f_2^{-1} \circ f_1 = \mathrm{id} \qquad (id \text{ ist die einzige Möbiustrafo, die mehr als 2 Fixpunkte hat}) \\
&\Rightarrow \quad f_2 = f_1
\end{aligned}$$

Satz 16.9.7.

Eine (von der Identität verschiedene) Möbiustransformation f ist durch die Vorgabe von drei paarweise verschiedenen Punkten $z_1,\ z_2,\ z_3$ mit den Werten $f(z_k) = w_k$ eindeutig bestimmt.

Beweis.

Eindeutigkeit: Siehe Bemerkung 16.9.6

Existenz: Übung

Spezielle Beispiele

a) Obere Halbebene $\longrightarrow$ Inneres des Einheitskreises

$$f(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

$$\left.\begin{aligned}
&i \mapsto 0 \\
&0 \mapsto -1 \\
&1 \mapsto \tfrac{1-i}{1+i} = \tfrac{(1-i)^2}{2} = -\tfrac{2i}{2} = -i
\end{aligned}\right\} \text{ lege } f \text{ eindeutig fest}$$

f: Rand $\longrightarrow$ Rand: $z = x + iy,\ y = 0$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad f(z) = \frac{x-i}{x+i} = \frac{1}{x^2+1}(x^2 - 1 - 2xi) \\
&\Rightarrow \quad |f(z)| = 1
\end{aligned}$$

b) Einheitskreis $\longrightarrow$ Einheitskreis

mit $0 \mapsto \tilde{a} \neq 0$ $(|\tilde{a}| < 1)$

$$\Rightarrow \quad f(z) = \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}} \text{ mit } |a|^2 - |b|^2 = 1 \ \left(\frac{b}{a} = \tilde{a}\right) \text{ siehe Kapitel 15.15}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad f(z) &= \frac{a}{\overline{a}} \frac{z-\alpha}{-\overline{\alpha}z+1} \quad \left(\text{mit } \alpha := -\frac{b}{a}\right) \\ &= -\frac{a}{\overline{a}} \frac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z-1} \quad \left(\text{mit } e^{i\theta} = -\frac{a}{\overline{a}}\right) \\ &= e^{i\theta} \frac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z-1} \end{aligned}$$

4. Beispiel für eine *nichteuklidische Geometrie* im Einheitskreis (siehe [Fischer & Lieb])

Seien $a, \tilde{e} \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$, $|\tilde{e}| = 1$ und K die Menge der Abbildungen f mit $f(z) = \tilde{e}\frac{z-a}{\overline{a}z-1}$

f : Einheitskreis $\longrightarrow$ Einheitskreis bijektiv.

$$f \hat{=} A = \begin{pmatrix} \tilde{e} & -a\tilde{e} \\ \overline{a} & -1 \end{pmatrix}$$

$\det A = \tilde{e}(-1 + |\overline{a}|^2) \neq 0$

Mit $f_1, f_2 \in K$ sind auch f_j^{-1} und $f_1 \circ f_2$ aus K, also:

K ist Gruppe mit Verknüpfung $\circ$.

Vergleiche: *Euklidische Geometrie*

Bewegungen wie Translation, Drehung, Spiegelung

Punkte, Geraden, Kreise werden in solche abgebildet.

Es gilt das „*Parallelenaxiom*“:

Zu jeder Geraden g und jedem Punkt $P \notin g$ gibt es genau eine Gerade durch P, die g nicht schneidet (die Parallele)

Nun zum Einheitskreis:

Punkte:= Punkte

Geraden:= Geraden, die den Rand senkrecht schneiden (durch Mittelpunkt) und Orthokreise (:= Kreisstücke, die den Rand senkrecht schneiden)

Kreise:= andere Geraden bzw. Kreisstücke

unter $f \in K$:

$$\left.\begin{array}{rcl} \text{Punkte} & \longrightarrow & \text{Punkte} \\ \text{Geraden} & \longrightarrow & \text{Geraden} \\ \text{Kreise} & \longrightarrow & \text{Kreise} \end{array}\right\}$$

denn: Kreisverwandschaft von $f \in K$ sowie Winkeltreue (f holomorph)

Jedoch: Das Parallelenaxiom gilt nicht.

Ergänzung zur Längenmessung: $w_j = \tilde{e}\frac{z_j-a}{\overline{a}z_j-1}$ $(j = 1, 2)$

$$\Rightarrow \left|\frac{w_1 - w_2}{1 - \overline{w}_1 w_2}\right| = \ldots = \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z}_1 z_2}\right|$$

Ansatz für Invariante:

$$d(z_1, z_2) := g\left(\left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z}_1 z_2}\right|\right)$$

mit $g:\ \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ noch zu bestimmen.

Forderung: auf der reellen Achse soll gelten:

$$\begin{aligned}
& d(0,x) + d(x,x+h) \stackrel{!}{=} d(0,x+h),\ (x,h \in \mathbb{R}) \\
\Leftrightarrow\quad & g(x) + g\left(\frac{h}{1-x(x+h)}\right) \stackrel{!}{=} g(x+h) \\
& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\left(g(x) + g\left(\frac{h}{1-x(x+h)}\right)\right)\Bigg|_{h=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h} g(x+h)\Bigg|_{h=0} \\
\Rightarrow\quad & g'(0) \cdot \frac{1}{1-x^2} = g'(x)
\end{aligned}$$

wähle: $g'(0) = 1,\ g(0) = 0$, damit:

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \qquad (g(1) = \infty)$$

$$\text{d.h. } d(z_1, z_2) := \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \left|\frac{z_1 - z_2}{1-\overline{z}_1 z_2}\right|}{1 - \left|\frac{z_1 - z_2}{1-\overline{z}_1 z_2}\right|}\right) \ \dots \text{ ist Metrik}$$

(Eigenschaften wie Dreiecksungleichung etc. noch zu beweisen)

5. $f(z) = z^n$, $n > 1$, $f'(z) = nz^{n-1}$, $f'(z) = 0 \ \Leftrightarrow z = 0$

   d.h. f ist in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ lokal konform.

   $z = r \cdot e^{i\phi} \ \Rightarrow \ f(z) = r^n e^{in\phi}$

   $(e_k)_{k=0,1,\dots,n-1}$ seien die n-ten Einheitswurzeln, d.h. die Nullstellen von $z \mapsto z^n - 1$:

$$\begin{aligned}
& e_k = e^{k\frac{2\pi i}{n}},\ k = 0, \dots, n-1 \\
n = 2: \quad & e_0 = 1,\ e_1 = e^{\pi i} = -1 \\
n = 3: \quad & e_0 = 1,\ e_1 = e^{\frac{2}{3}i\pi},\ e_2 = e^{\frac{4}{3}i\pi} \\
n = 4: \quad & e_0 = 1,\ e_1 = e^{\frac{\pi}{2}i} = i,\ e_2 = e^{i\pi} = -1,\ e_3 = e^{\frac{3}{2}\pi i} = -i
\end{aligned}$$

   f: Sektor $:= S_k := \{z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} | \frac{2\pi}{n} k < \arg z < \frac{2\pi}{n}(k+1)\} \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^+$ injektiv und konform, denn:

   $z = re^{i\phi} \in S_k$, dann: $z^n = r^n e^{in\phi}$, $r^n \in \mathbb{R}$, $n\phi \in (2k\pi, (k+1)2\pi)$, also:

   $f: S_k \to \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+$ konform, insbesondere injektiv:

   $z_1^n = z_2^n \Rightarrow n\phi_1 \underbrace{=}_{\text{mod}\,\frac{2\pi}{n}} n\phi_2 \Rightarrow \phi_1 = \phi_2$

6. Zu f aus 5. also existent:

$$f^{-1}_{\text{„}k\text{“}} =: \sqrt[n]{\cdot}: \qquad \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow S_k,\ z \mapsto \sqrt[n]{z}$$

$f:\ S_0 \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^+$ biholomorph

f auch für $\arg z = 0$ definiert

$$f:\ \tilde{S}_0 := \left\{ z|\ 0 \leq \arg\, z < \frac{2\pi}{n} \right\} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ bijektiv}$$

Mit $z = re^{i\phi}$ gilt:

$$z^n = r^n e^{in\phi} \longrightarrow \begin{cases} r^n & ,\phi \to 0 \\ r^n e^{i\frac{2\pi}{n}n} = r^n & ,\phi \to \frac{2\pi}{n} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\phi}{n}} \longrightarrow \begin{cases} \sqrt[n]{r} & ,\phi \to 0 \\ \sqrt[n]{r} e^{i\frac{2\pi}{n}} & ,\phi \to 2\pi \end{cases}$$

d.h. anderer Wert nach einmaligem Umlauf des Nullpunktes, erst nach n Umläufen wieder derselbe Wert.

$n = 2, r = 1$

ϕ_i	0	$\frac{\pi}{2}$	π	2π	4π
$\sqrt{z}$	1	$e^{i\frac{\pi}{4}}$	i	-1	1

Das führt zur Idee der *Riemannschen Fläche*:

Beispiel 16.9.8. $n = 2$

$$\begin{aligned} &f_1:\ \tilde{S}_0 = \{z|0 \leq \arg\, z < \pi\} \longrightarrow \mathbb{C} \\ &f_1(z) = z^2 \\ &f_2:\ \tilde{S}_1 = \{z|\pi \leq \arg\, z < 2\pi\} \longrightarrow \mathbb{C} \\ &f_2(z) = z^2 \end{aligned}$$

Zusammensetzung zu einem biholomorphen f, welches auf zwei Exemplare B_1, B_2 von $\mathbb{C}$ abbildet.

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \begin{cases} \mathbb{C} & \hat{=} & \pi \leq \phi \leq 2\pi \\ \mathbb{C} & \hat{=} & 0 \leq \phi \leq \pi \end{cases}$$

Riemannsche Fläche R_2 für f mit

$$\begin{aligned} &f:\ \mathbb{C} \longrightarrow R_2 \\ &z \mapsto z^2 \in \begin{cases} B_2 & \pi \leq \phi \leq 2\pi \\ B_1 & 0 \leq \phi \leq \pi \end{cases} \end{aligned}$$

jetzt:

$$f^{-1} = \sqrt{\ }:\ R_2 \longrightarrow \mathbb{C},\ z \mapsto \sqrt{z}$$

mit:

$$\arg\sqrt{z} \in \begin{cases} [0,\pi] & \textit{falls } z \in B_1 \\ [\pi, 2\pi] & \textit{falls } z \in B_2 \end{cases}$$

Bemerkung 16.9.9.

0 und ∞ sind sogenannte *„Verzweigungspunkte"*.

(Aufschneiden längs einer Verbindung von Verzweigungspunkten erlaubt eindeutiges Umkehren)

7. $f(z) = e^z,\ f'(z) = e^z \qquad e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \neq 0$

   $f(z + 2k\pi i) = f(z),\ k \in \mathbb{Z}$

   $S_k := \{z | (k-1)2\pi < y < k \cdot 2\pi\}$

   $f:\ S_k \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+$

   (ählich wie in 6.)

   hier: ∞-blättrige Riemannsche Fläche

   Verzweigungspunkte: 0, ∞

   Die Umkehrabbildung heißt (wieder) Logarithmus (ln).

   Für $z = re^{i\phi}$ ist $\ln z := \ln r + i\phi = \ln |z| + i\arg z$

   $0 \leq \phi < 2\pi$: *Hauptzweig* ($\phi = 0:\ \ln z = \ln |z|$)

   $z = r \cdot e^{i\phi},\ r = 1$

ϕ	$-\pi$	0	π	2π	3π
$\ln z$	$-i\pi$	0	πi	$2\pi i$	$3\pi i$

8. $f(z) = \cos z$, über Reihe definiert:

$$\cos z = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{z^{2j}}{(2j)!}$$

$$\text{analog: } \sin z = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

Additionstheoreme: z.B:

$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b,\ (a, b \in \mathbb{C})$$
$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad (z \in \mathbb{C})$$
$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

Richtig, da im Reellen richtig plus Identitätssatz (links und rechts stehen Potenzreihen).

Ebenso:

$$\begin{aligned}\cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{ix}e^{-y} + e^{y}e^{-ix}}{2} \\ &= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \\ &= \cos(x + iy)\end{aligned}$$

Nullstellen:

$\cos z = 0 \ \Leftrightarrow\ \cos x = 0$ und ($y = 0$ oder $\sin x = 0$). Da $\cos x = 0$ und $\sin x = 0$ nicht gleichzeitig möglich ist, bleibt nur die erste Möglichkeit.

Es gilt:

$$\begin{aligned} & \cos x = 0 \ \wedge \ y = 0 \\ \Leftrightarrow \qquad & z = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Also sind die Nullstellen des komplexen Cosinus gleich den Nullstellen des reellen Cosinus.

$$\begin{aligned} & \cos(z + 2\pi) = \cos z \\ & \cos(-z) = \cos z \\ & S := \underbrace{\{z \in \mathbb{C} | 0 < x < \pi\}}_{=\tilde{S}} \cup (\{0\} \times (0, \infty)) \cup (\{\pi\} \times (-\infty, 0)) \end{aligned}$$

1) $x = 0,\ y \in [0, \infty),\ \cos z = \cosh y$

2) $x = \pi,\ y \in (-\infty, 0],\ \cos z = -\cosh y$

3) $x = \frac{\pi}{2},\ y = 0,\ \cos z = 0$

4) $x = \frac{\pi}{2},\ y \in [0, \infty),\ \cos z = -i \sinh y$

5) $x = \frac{\pi}{2},\ y \in (-\infty, 0],\ \cos z = -i \sinh y$

6) $x \in (0, \pi),\ y = k \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \cos z = u + iv,\ u, v \in \mathbb{R}$

   $u = \cos\ x\ \cosh\ k,\ v = -\sin\ x\ \sinh\ k$

$$\Rightarrow \left(\frac{u}{\cosh\ k}\right)^2 + \left(\frac{v}{\sinh\ k}\right)^2 = 1 \qquad \text{(Ellipse)}$$

7) $x = c > \frac{\pi}{2},\ y \in (-\infty, \infty)$

$$\begin{aligned} & \cos\ z = \underbrace{\cos c}_{<0} \cosh y - i \underbrace{\sin c}_{>0} \sinh y = u + iv \\ \Rightarrow & \left(\frac{u}{\cos c}\right)^2 - \left(\frac{v}{\sin c}\right)^2 = 1 \qquad \text{(Hyperbel)} \end{aligned}$$

8) $y = 0$ (vgl. Punkt $6 | x \in (0, \pi)$) $\cos\ z = \cos\ x$

$f = \cos\ z = \tilde{S} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} | Re(z) \in (-\infty, 1] \cup [1, \infty)$ und $Im(z) = 0\}$ biholomorph

$f'(z) = -\sin\ z$

Nullstellen: $z_n = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

Inverse: $f^{-1}(w) =: \arccos\ w$

$$\begin{aligned} & w = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2} \left(\tilde{z} + \frac{1}{\tilde{z}}\right) \\ & \tilde{z} := e^{iz} \\ \Rightarrow \qquad & \tilde{z} = w \pm \sqrt{w^2 - 1} \\ \Rightarrow \qquad & \arccos\ w = -i \ln \tilde{z} \\ & = -i \ln(w \pm \sqrt{w^2 - 1}) \end{aligned}$$

Verzweigungspunkte: $-1,\ 1,\ \infty$,

aufschneiden längs $(-\infty, 1]$ und $[1, \infty)$

16.10 Das Schwarzsche Lemma und das Schwarzsche Spiegelungsprinzip

Sei $B := B(0,1)$

Satz 16.10.1 (Schwarzsches Lemma)**.**
Sei $f:\ B \longrightarrow B$ holomorph mit $f(0) = 0$. Dann gilt:

(i) $\forall\, z \in B:\ |f(z)| \leq |z|$ *und* $|f'(0)| \leq 1$

(ii) *(*$\exists\, z_0 \neq 0 : |f(z_0)| = |z_0|$*) oder (*$|f'(0)| = 1$*)*

$$\Rightarrow\ \exists\, \phi \in \mathbb{R}:\ f(z) = e^{i\phi} z \qquad \textit{Drehung}$$

Beweis.

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & ,\ z \neq 0 \\ f'(0) & , z = 0 \end{cases}$$

(i) $\Rightarrow g$ holomorph in $z \neq 0$, stetig in B

$\Rightarrow g$ holomorph in B.

Für $|z| \leq r < 1$ folgt (Maximum-Prinzip):

$$|g(z)| \leq \max_{|\xi|=r} \frac{|f(\xi)|}{|\xi|} \underbrace{\leq}_{f \leq 1} \frac{1}{r}$$

$$r > 1:\ \forall\, z:\ |g(z)| \leq 1$$

$$\Rightarrow\ |f(z)| \leq |z| \text{ und } |f'(0)| \leq 1$$

(ii) $|f'(0)| = 1$ oder $|f(z_0)| = |z_0|$ für $z_0 \neq 0$

$\Rightarrow\ |g(0)| = 1$ oder $|g(z_0)| = 1$

Maximum-Prinzip $\Rightarrow\ \forall z : |g(z)| = 1,\ g(z) = \text{const.}$

$\Rightarrow\ \exists\, \phi \in \mathbb{R}\ \forall z:\ g(z) = e^{i\phi}$, also: $f(z) = ze^{i\phi}$

Q.E.D.

$G \subset \mathbb{C}$ Gebiet mit $z \in G \Rightarrow \overline{z} \in G$.

$G = B \cup I \cup B^*$ mit:

$B = \{z \in G | Im(z) > 0\}$

$I = \{z \in G | Im(z) = 0\}$

$B^* = \{z \in G | Im(z) < 0\}$

Fortsetzung von auf $B(\cup I)$ holomorphen Funktionen auf ganz G.

Satz 16.10.2 (Schwarzsches Spiegelungsprinzip)**.**
$G \subset \mathbb{C}$ Gebiet mit $G = B \cup I \cup B^*$, ($z \in G \Rightarrow \bar{z} \in G$)
$f: \ B \cup I \to \mathbb{C}$ stetig, $f: \ B \to \mathbb{C}$ holomorph, $f \restriction I$ reellwertig. Dann gilt:

$$\Rightarrow \hat{f} : G \longrightarrow \mathbb{C} \ mit$$
$$\hat{f}(z) := \begin{cases} f(z) & , z \in B \cup I \\ \overline{f(\overline{z})} & , z \in B^* \end{cases}$$

ist holomorph.

Beweis.

1. $\hat{f}: \ B^* \longrightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph:
$$\begin{aligned} \frac{\hat{f}(z+h) - \hat{f}(z)}{h} &= \frac{\overline{\overline{f(\overline{z+h})} - \overline{f(\overline{z})}}}{h} \\ &= \overline{\left(\frac{f(\overline{z} + \overline{h}) - f(\overline{z})}{\overline{h}}\right)} \underbrace{\longrightarrow}_{\bar{h} \to 0} \overline{f'(\overline{z})} \end{aligned}$$

2. $\hat{f}: \ B^* \cup I \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig, denn f reellwertig auf I
$\hat{f}(z)_{z \in B^*} \stackrel{z \to z_0 \in I}{\longrightarrow} \lim_{z \to z_0} \overline{f(\overline{z})} \to f(z_0)$, weil f reellwertig auf I ist.

3. Sei Δ ein Dreieck in G (Inneres + Rand).
$\Delta \subset B$ oder $\Delta \subset B^*$:
(zeige: $\int_{\partial \Delta} \hat{f}(z) dz = 0$)
Für $\varepsilon > 0$:
$$G_\varepsilon := \{z \in G | -\varepsilon < Im(z) < \varepsilon\}$$
$$\int_{\partial \Delta} \hat{f}(z) dz = \int_{\partial(\Delta \cap G_\varepsilon)} \hat{f}(z) dz$$
$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0: \left| \int_{\partial \Delta} \hat{f}(z) dz \right| \leq \left| \int_{\partial(\Delta \cap G_\varepsilon)} \hat{f}(z) dz \right| \stackrel{\varepsilon \downarrow 0}{\longrightarrow} 0$$

Q.E.D.

16.11 Ganze Funktionen

Wir betrachten nun auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktionen.

Definition 16.11.1. *Eine holomorphe Funktion $f: \ \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt ganz (engl: entire).*

Beispiele hierfür sind $e^z \ \cos(z), \ \sin(z), z^n$.

Im folgenden werden wir einige Aussagen über die Werteverteilung ganzer Funktionen beweisen.

Satz 16.11.2 (von Liouville)**.** *Ist f ganz und beschränkt so folgt: f ist konstant.*

Beweis. f ist nach Vor. holomorph in $\mathbb{C}$

$$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C} : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,\ z \in \mathbb{C}$$

$$\forall r > 0 :\ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi|=r} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi$$

Sei nun $\forall z : |f(z)| \leq c < \infty$. Dann folgt

$$|a_n| \leq |\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{c}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r| = \frac{c}{r^n} \overset{r\to\infty, n\geq 1}{\longrightarrow} 0$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1 :\ a_n = 0 \text{ bzw. } f(z) = a_0$$

Q.E.D.

Satz 16.11.3. *Sei f ganz, mit*

$$\exists\, c > 0\ \forall z \in \mathbb{C} :\ |f(z)| \geq c$$

$\Rightarrow$ f ist konstant.

Beweis. Sei

$$g := \frac{1}{f}$$

dann ist g beschränkt und somit nach dem vorigen Satz g konstant, also auch f konstant.

Q.E.D.

Polynome nennt man **ganz rational**, andere ganze Funktionen nennt man **ganz transzendent**.

Satz 16.11.4. *Sei $f = p_n$ ein Polynom n–ten Grades, $n \geq 1$.*

$$\Rightarrow \forall k > 0\ \exists\, r > 0 :\ \forall z, |z| > r :\ |f(z)| > k$$

Beweis.

$$a_n \neq 0 :\ f(z) = z^n \left\{ a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n} \right\},\ z \neq 0$$

$$\Rightarrow |f(z)| \geq |z|^n \left| |a_n| - \left| \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n} \right| \right|$$

$$\geq \frac{|z|^n |a_n|}{2}$$

für z mit $|z| \geq r_1 = r_1(a_0, \ldots, a_n)$.
$\Rightarrow$ $|f(z)| > k$, falls

$$|z| > \sqrt[n]{\frac{2k}{|a_n|}} =: r_2,$$

$$r = \max\{r_1, r_2\}$$

Q.E.D.

Daraus können wir den Fundamentalsatz der Algebra folgern.

Satz 16.11.5 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Ein Polynom p_n, $n \geq 1$ hat genau n Nullstellen.*

Beweis. p_n habe <u>eine</u> Nullstelle z_1.

$$\Rightarrow p_n(z) = p_n(z) - p_n(z_1)$$

$$= a_n(z^n - z_1^n) + \ldots + a_1(z - z_1) = (z - z_1) \cdot p_{n-1}(z)$$

Es reicht zu zeigen: p_n besitzt mindestens eine Nullstelle.
Annahme: $p_n(z) \neq 0$ für alle z. Dann ist $g(z) := \frac{1}{p_n(z)}$ ganz mit:

(i) $\exists\, r > 0 :\ \forall z, |z| \geq r :\ |g(z)| \leq 1$

(ii) $\exists\, K :\ \forall z, |z| \leq r :\ |g(z)| \leq K$ (g stetig).

$$\Rightarrow \forall\ z :\ |g(z)| \leq \max\{1, K\}$$

$\Rightarrow g$ konstant $\Rightarrow\ p_n$ konstant.
Widerspruch.

Q.E.D.

Satz 16.11.6.
f sei ganz transzendent. Dann gilt:

$$\forall k > 0,\ \forall m \in \mathbb{N}_0 :\ \forall r > 0\ \exists\ z, |z| > r :\ |f(z)| > k|z|^m$$

Beweis.
Annahme:

$$\exists k > 0\ \exists r > 0\ \exists m \in \mathbb{N}_0\ \forall |z| > r :\ |f(z)| \leq k|z|^m$$

Wegen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n :\ |a_n| = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta$$

$$\overset{\rho > r}{\Rightarrow} |a_n| \leq k\rho^{m-n} \overset{\rho\to\infty, m<n}{\longrightarrow} 0$$

$$\Rightarrow \forall n > m : a_n = 0$$

Dann ist f aber ein Polynom. Widerspruch zur Voraussetzung.

Q.E.D.

Satz 16.11.7 (von Casorati–Weierstraß)**.** *(Felice Casorati, 17.12.1835–11.9.1890)*
Sei f ganz transzendent. Dann gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall c \in \mathbb{C}\ \forall r > 0\ \exists z,\ |z| > r :\ |f(z) - c| < \varepsilon$$

Bemerkung 16.11.8. *„c“ muss nicht angenommen werden, vgl.* $e^z \neq 0$.

Beweis.

1. f habe unendlich viele c–Stellen.

   Diese können aber wegen des Identitätssatzes keinen Häufungspunkt im Endlichen haben, da sonst $f(z) = c = const.$ (Identitätssatz) und somit ein Polynom wäre.

2. f habe keine c–Stelle.

   Dann ist
   $$g(z) := \frac{1}{f(z) - c}$$
   ganz mit $g(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

   $\Rightarrow g$ ist kein Polynom $\Rightarrow g$ ist ganz transzendent.

   Mit den vorigen Satz folgt dann ($k := \frac{2}{\varepsilon}$, $m := 0$):
   $$\forall \varepsilon > 0,\ \forall r > 0\ \exists\, z, |z| > r:\ |g(z)| \geq \frac{2}{\varepsilon}$$
   $$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \forall r > 0\ \exists\, z, |z| > r: |f(z) - c| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

3. f habe endlich viele c–Stellen: $z_1, \dots, z_j$ ($z_k \neq z_j$ $(k \neq j)$) mit Ordnungen $\alpha_1, \dots, \alpha_j$.
   $$\text{Sei } g(z) := \frac{f(z) - c}{(z - z_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (z - z_j)^{\alpha_j}}$$
   $\Rightarrow g$ ist ganz und nicht konstant, g hat keine Nullstelle, ergo ist g ganz transzendent.

   $\Rightarrow\ h := \frac{1}{g}$ ist ganz transzendent (siehe Fall 2)

   Sei $m := \sum_i \alpha_i \ \Rightarrow\ \exists r_1 > 0\ \forall |z| \geq r_1:\ \left|\frac{(z-z_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (z-z_j)^{\alpha_j}}{z^m}\right| \leq 2$

   Wieder folgt mit dem vorigen Satz:
   $$\forall \varepsilon > 0\ \forall r > 0\ \exists\, z, |z| > r:\ |h(z)| \geq \frac{2}{\varepsilon}|z|^m$$
   $$\Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \forall r \geq r_1 \exists\, z, |z| > r:\ |h(z)| > |\frac{(z - z_1)^{\alpha} \cdot \ldots \cdot (z - z_j)^{\alpha_j}}{\varepsilon}|$$
   $$\Rightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \forall\ r \geq r_1\ \exists\, |z| > r:\ |f(z) - c| < \varepsilon$$

   Q.E.D.

Ziel: Weitere Aussagen zur Werteverteilungstheorie, dazu Verschärfung des Satzes von Liouville

Sei dazu nun f ganz ohne Nullstelle, so gibt es F, ganz, mit $e^{F(z)} = f(z)$, d.h. $F(z) = \ln f(z)$ (Vorsicht: „richtiges Blatt“ wählen!)
denn:
$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ (ganz)}$$
wähle $F(0)$ mit $e^{F(0)} = f(0) \in \mathbb{C}$ mit $0 \leq \arg F(0) < 2\pi$ (hier Wahl des Blatts)
$$F(z) := F(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$$

$\Rightarrow F$ ganz und $F' = f'/f$

$$\left(\frac{e^F}{f}\right)' = \frac{F'e^F \cdot f - e^F f'}{f^2} = 0$$
$$\Rightarrow \exists\, c: \; e^{F(z)} = cf(z)$$

$c = 1$, weil $e^{F(0)} = f(0)$.

$$\Rightarrow e^{F(z)} = f(z)$$

„Definiere:“ $\ln f(z)(:) = F(z)$

$$\Rightarrow F(z) = \ln|f(z)| + i\mathrm{arg} f(z)$$

Sei

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$$\Rightarrow \Re(F(z)) = \ln|f(z)| = \Re(\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n + i\beta_n)^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi)) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n(\alpha_n\cos(n\phi) - \beta_n\sin(n\phi))$$

mit $a_n = \alpha_n + i\beta_n$, $z = re^{i\phi}$

$$= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(\alpha_n\cos(n\phi) - \beta_n\sin(n\phi))$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi}(\ln|f(z)|)^2 d\phi = 2\pi\alpha_0^2 + \pi\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}(\alpha_n^2 + \beta_n^2)$$

Für $m \geq 1$:

$$\pi r^{2m}(\alpha_m^2 + \beta_m^2) \leq 2\pi\alpha_0^2 + \pi\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}(\alpha_n^2 + \beta_n^2) \tag{16.2}$$

Annahme: $\exists\, A, B > 0\, \exists 0 \leq \alpha < 1:$

$$\forall z: \; |f(z)| \leq Ae^{B|z|^\alpha}$$

Dann folgt:

$$\Rightarrow (\ln|f(z)|)^2 \leq (\ln A + Br^\alpha)^2$$

$$\Rightarrow \; \alpha_m^2 + \beta_m^2 \leq \frac{1}{\pi r^{2m}}(2\pi\alpha_0^2 + \pi\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}(\alpha_n^2 + \beta_n^2))$$

$$= \frac{1}{\pi r^{2m}}\int_0^{2\pi}(ln|f(z)|)^2 d\phi \leq 2\frac{(\ln A + Br^\alpha)^2}{r^{2m}} \overset{r\to\infty, 2m > 2\alpha}{\longrightarrow} 0 \; (\alpha < 1)$$

$$\Rightarrow \forall m \geq 1: \alpha_m = \beta_m = 0 \;\; \Rightarrow f(z) \equiv \alpha_0$$

Daraus formulieren wir

Satz 16.11.9. *Sei f ganz, ohne Nullstelle, $\exists\, A, B > 0\, \exists\, 0 \leq \alpha < 1$ mit*

$$\forall z: \; |f(z)| \leq Ae^{B|z|^\alpha}.$$

Dann ist f konstant.

Bemerkung 16.11.10.

1. *Der Satz ist falsch für* $\alpha = 1$*:*
$$f(z) = e^z$$
ist nicht konstant, aber $|e^z| \leq |\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|}$.

2. $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$ *beliebig*
dann: $\alpha_m = \beta_m = 0$ *für* $m > [\alpha]$
d.h. $f(z) = e^{\sum_{n=0}^{[\alpha]} a_n z^n}$
(vgl: $\alpha = 1,\ f(z) = e^z$*)*

Beispiele 16.11.11.

1. $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(2n)!}$ *ist ganz,*
$$|f(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|z|^{\frac{1}{2}})^{2n}}{(2n)!} \leq e^{|z|^{\frac{1}{2}}} :\ A = B = 1,\ \alpha = \frac{1}{2}$$
$$f(0) = 1,\ f(1) \neq 1$$
$\Rightarrow f$ *besitzt eine Nullstelle.*

Behauptung. f hat unendlich viele Nullstellen.

Beweis. Annahme: f besitzt endlich viele Nullstellen: $z_1, \ldots, z_k$
$$P(z) := \prod_{j=1}^{k} (z - z_j) \Rightarrow\ g := \frac{f}{P} \text{ ganz, hat keine Nullstellen}$$
$$\exists\ R :\ \forall z, |z| \geq R :\ |P(z)| \geq \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \exists\ R\ \forall z, |z| \geq R :\ |g(z)| = \frac{|f(z)|}{|P(z)|} \leq \frac{e^{\sqrt{|z|}}}{\frac{1}{2}} = 2e^{\sqrt{|z|}}$$
Ferner gilt
$$\exists\ k > 0 :\ \forall |z| \leq R :\ |g(z)| \leq k \leq k \cdot e^{\sqrt{|z|}}$$
$$\Rightarrow \forall z :\ |g(z)| \leq \max\{2, k\} e^{\sqrt{|z|}} \Rightarrow g \text{ konstant}$$
$\Rightarrow\ f = (\text{const}) \cdot \text{Polynom}$

Widerspruch.

Q.E.D.

Allgemein folgt so:

Satz 16.11.12. *f ganz transzendent,* $\exists A, B > 0\ \exists 0 \leq \alpha < 1$ *mit* $\forall\ z :\ |f(z)| \leq Ae^{B|z|^{\alpha}} \Rightarrow\ f$ *besitzt unendlich viele Nullstellen.*

Bemerkung 16.11.13. *Mit $g(z) = f(z) - a$ für $a \in \mathbb{C}$ beliebig, aber fest, folgt wegen*

$$|a| \leq |a| e^{B|z|^\alpha}$$

auch, dass g eine ganz transzendente Funktion mit beliebig vielen Nullstellen ist. f besitzt also unendlich viele a–Stellen.

16.12 Laurentreihen

(Pierre Alphonse Laurent, 18.7.1813 – 2.9.1854)

Verallgemeinerung von Taylorreihen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

zu Reihen der Art:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Dazu sei f im Kreisring

$$K(z_0, r_1, r_2) := \{z | \; r_1 < |z - z_0| < r_2\}$$

holomorph.

Seien $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$ beliebig. Dann gilt mit der Cauchyschen Integralformel für nullhomologe Zyklen bei Betrachtung von $\Gamma := \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$, wobei

$$\Gamma_1 : t \in [0,1] \mapsto \gamma_1(t) = \rho_1 e^{2\pi t} \quad \Gamma_2 : t \in [0,1] \mapsto \gamma_2(t) = \rho_1 + t(\rho_2 - \rho_1)$$

$$\Gamma_3 : t \in [0,1] \mapsto \gamma_3(t) = \rho_2 e^{-2\pi t} \quad \Gamma_4 : t \in [0,1] \mapsto \gamma_4(t) = \rho_2 + t(\rho_1 - \rho_2)$$

$$\Rightarrow \oint_\Gamma f(z)dz = 0 \; \wedge \; \int_{\Gamma_2} f(z)dz = -\int_{\Gamma_4} f(z)dz$$

$$\Rightarrow \forall z \in K(z_0, \rho_1, \rho_2) : f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$=: I_1 + I_2$$

Zu I_1:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - (z - z_0) - z_0} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$$

Da $|z - z_0| < |\zeta - z_0| = \rho_2$

folgt:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0|=\rho_2} f(\zeta) \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0|=\rho_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right)}_{=:a_n} (z - z_0)^n$$

Zu I_2:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} - 1}$$

Da $\rho_1 = |\zeta - z_0| < |z - z_0|$ ist

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^n}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \; I_2 = \sum_{n=-\infty}^{-1} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \rho_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right)}_{=:a_n} (z - z_0)^n$$

$$\Rightarrow \forall z \in K(z_0, r_1, r_2) : f(z) = I_1 + I_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

mit

$$a_n = \int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \; r_1 < \rho < r_2 \text{ beliebig}$$

denn:

$$\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

ist holomorph in $K(z_0, r_1, r_2)$

Satz 16.12.1. *Sei f im Kreisring $K(z_0, r_1, r_2)$ holomorph.*

$$\Rightarrow \; \forall z \in K(z_0, r_1, r_2) : \; f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

mit

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \; (r_1 < \rho < r_2 \textit{ beliebig})$$

Die ist die „Laurentreihe von f“.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

*heißt **Nebenteil** von f.*

$$\sum_{=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$$

*heißt **Hauptteil** von f.*

Die Laurentreihe ist eindeutig:

Sei auch

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

Dann gilt aber

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \rho} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{b_j (\zeta - z_0)^j}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \rho} (\zeta - z_0)^{j-n-1} d\zeta = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j \delta_{jn} = b_n
\end{aligned}$$

Bezeichnungen 16.12.2.

(i) Ist $k \geq 1 \quad a_{-k} \neq 0$ und

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

so sagen wir: f hat einen *Pol der Ordnung* k (in z_0).

(ii) Gilt:

$$\forall k \in \mathbb{N} \; \exists \, k_0 \geq k : \; a_{-k_0} \neq 0, f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

so: f ist in z_0 *wesentlich singulär*.

In $\infty \in \hat{\mathbb{C}}$ wird wie folgt klassifiziert:
$f = f(z)$ verhält sich in $z = \infty$ wie $F(w) := f\left(\frac{1}{w}\right)$ in $w = 0$.
Z.B. ist f ganz rational, falls F im Nullpunkt höchstens einen Pol besitzt und nicht wesentlich singulär ist.

Beispiele 16.12.3.

1.

$$f(z) := \frac{z}{z-1}$$

f ist holomorph in $K(1, 0, \infty)$

In $U(1)$:

$$f(z) = \frac{z - 1 + 1}{z - 1} = 1 + \frac{1}{z-1}$$

d.h. f hat einen Pol erster Ordnung in $z = 1$.

In $U(0)$:

$$f(z) = -z \frac{1}{1-z} = -\sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

Konvergenzradius: 1

In $U(\infty)$:

$$F(w) = \frac{\frac{1}{w}}{\frac{1}{w} - 1} = \frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n;$$

f holomorph in $z = \infty$.

2.

$$f(z) := \frac{2z}{z^2-1} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1}$$

Pole 1. Ordnung in $z = 1$ bzw. $z = -1$.

In ∞:

$$F(w) = \frac{\frac{2}{w}}{(\frac{1}{w})^2 - 1} = \frac{2w}{1-w^2} = 2w \sum_{n=0}^{\infty} w^{2n} :$$

konvergiert für $|w| < 1$; f ist holomorph in ∞.

3.

$$\text{Für } z \neq 0: \ f(z) := e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{1}{(-n)!} z^n$$

wesentlich singulär in $z = 0$.

$$F(w) = f(\frac{1}{w}) = e^w$$

f holomorph in ∞

4.

$$f(z) = \sqrt{(z-1)(z+1)}$$

In ∞:

$$F(w) = \sqrt{(\frac{1}{w}-1)(\frac{1}{w})+1} = \frac{1}{w}\sqrt{1-w^2}$$

Pol erster Ordnung in ∞.

5.

$$\text{Für } z \neq 0 \text{ ist } f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\left\{z - \frac{z^3}{3!} \pm \dots\right\} = 1 - \frac{z^2}{z!} \pm \dots$$

f ist über die Reihe auch in $z = 0$ wohldefiniert und somit holomorph ergänzbar auf ganz $\mathbb{C}$.

Wir beschäftigen uns nun weiter mit der Werteverteilung und formulieren dazu folgenden

Satz 16.12.4. *Sei f in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ holomorph und habe einen Pol in z_0.*

$$\Rightarrow \forall K > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall z, \ |z - z_0| < \delta : |f(z)| > K$$

Beweis.

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \ a_{-k} \neq 0, \ k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}\left\{\underbrace{1 + \frac{a_{-k+1}}{a_{-k}}(z-z_0) + \dots}_{\text{holomorph, sowie } |\cdot|<\frac{1}{2} \text{ falls } |z-z_0|<\delta_1}\right\}$$

$$\Rightarrow |f(z)| \geq \frac{|a_{-k}|}{2|z-z_0|^k} > k \text{ für } |z-z_0| < \exists\delta_2$$

$\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$

Q.E.D.

Satz 16.12.5 (Übertragung von Casorati-Weierstraß)**.**
Sei f holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ und in z_0 wesentlich singulär.

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \forall c \in \mathbb{C} \; \forall \delta > 0 \; \exists \; z, |z - z_0| < \delta : \; |f(z) - c| < \varepsilon$$

d.h: jeder Wert $c \in \mathbb{C}$ wird in jeder Umgebung beliebig nah approximiert.

Beweis.

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{0} a_n (z - z_0)^n}_{=:f_1(z)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n}_{=f_2(z)}$$

$$|f_2(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für } |z - z_0| <^{\exists} \delta_1$$

$$\zeta := (z - z_0)^{-1} \Rightarrow \; f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n} \zeta^n =: \tilde{f}_1(\zeta)$$

$\tilde{f}_1$ ist ganz transzendent.
Mit dem Satz von Casorati-Weierstraß folgt:

$$\Rightarrow \; \forall r > 0 \; \forall \varepsilon > 0 \; \forall c \in \mathbb{C} \; \exists \; \zeta, |\zeta| > r : \; |\tilde{f}_1(\zeta) - c| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Setze: $r = \frac{1}{\delta}$, mit $\zeta = \frac{1}{z - z_0}$ (s.o.) folgt $\forall \epsilon > 0 \forall c \in \mathbb{C} \exists z, |z - z_0| < \delta : |f_1(z) - c| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow |f(z) - c| \leq |f_1(z) - c| + |f_2(z)| < \varepsilon$$

Q.E.D.

Definition 16.12.6. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, f heißt auf U **meromorph**, falls $f : U \setminus P_f \to \mathbb{C}$ holomorph ist mit einer diskreten Menge (d.h. ohne Häufungspunkte) P_f von Polen.*

16.13 Der Residuenkalkül

Wichtig zur Berechnung von (reellen) Integralen. Zunächst eine
Erinnerung:

$$\oint_{|z-z_0|=r} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & n = -1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Falls f in z_0 eine isolierte Singularität besitzt mit der Laurentreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{16.3}$$

So ist

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \text{ (r geeignet)}$$

Insbesondere ist

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} f(z)dz$$

Definition 16.13.1.

*$a_{-1} = a_{-1}(f, z_0)$ heißt das **Residuum** von f in z_0.*

Schreibweise:

$$a_{-1} =: \operatorname{res}_{z=z_0}(f)$$

Satz 16.13.2 (Residuensatz)**.** *Sei f im Gebiet G holomorph mit Ausahme endlich vieler (isolierter) Stellen. Γ sei ein geschlossener Integrationsweg, auf dem f holomorph ist. Dann gilt:*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z)dz = \text{ Summe der Residuen von } f \text{ in den von } \Gamma \text{ umschlossenen (singulären) Stellen}$$

Beweis.

Seien $z_1, \ldots, z_m$ die singulären Stellen. Wegen der Holomorphie von f außerhalb der bekannten Pole ist

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_j|=r} f(z)dz = \sum_{j=1}^{m} a_{-1}(f, z_j)$$

(r_j geeignet)

Q.E.D.

Satz 16.13.3.

Sei f in G meromorph, Γ ein geschlossener Integrationsweg in G, f besitze auf Γ weder Pole noch Nullstellen. Ist N bzw. P die Anzahl der Nullstellen bzw. Polstellen im von Γ umrandeten Gebiet, jeweils entsprechend der Ordnung (Vielfachheit) gezählt, dann gilt:

$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

Beweis.

1. Sei z_1 Nullstelle der Ordnung α.

$$\Rightarrow \text{in } U(z_1): \; f(z) = a_\alpha (z - z_1)^\alpha + \ldots \quad , \; a_\alpha \neq 0$$

$$\Rightarrow f'(z) = \alpha a_\alpha (z - z_1)^{\alpha - 1} + \ldots$$

$$\Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\alpha a_\alpha (z - z_1)^{\alpha-1} + \ldots}{a_\alpha (z - z_1)^\alpha + \ldots} = \frac{\alpha}{z - z_1} \underbrace{\frac{1 + \frac{\alpha+1}{\alpha} \frac{a_{\alpha+1}}{a_\alpha}(z - z_1) + \ldots}{1 + \frac{a_{\alpha+1}}{a_\alpha}(z - z_1) + \ldots}}_{:=H}$$

H ist holomorph in $U(z_0)$ mit $H(z_1) = 1$, sodass sich $\frac{f'(z)}{f(z)}$ schreiben lässt als

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\alpha}{z - z_1} + \text{holomorphe Funktion}$$

Sei r_1 so gewählt, daß $B(z_1, r_1) \subset U(z_1)$.

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_1|=r_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \alpha$$

Daraus ergibt sich N.

1. Jetzt habe f einen Pol in z_2 der Ordnung β.

   Dann gilt in einer Umgebung $U(z_2)$ von z_2:

$$f(z) = \frac{b_{-\beta}}{(z-z_2)^{\beta}} + \ldots, \text{ wobei } b_{-\beta} \neq 0$$

$$\Rightarrow f'(z) = -\beta \cdot b_{-\beta}(z-z_2)^{-\beta-1} + \ldots$$

$$\Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-\beta b_{-\beta}(z-z_2)^{-\beta-1} + \ldots}{b_{-\beta}(z-z_2)^{-\beta} + \ldots} = -\frac{\beta}{z-z_2} + H$$

   Analog zu obigen Ausführungen ist H holomorph in $U(z_2) \supset B(z_2, r_2)$.

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_2|=r_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -\beta$$

   Daraus ergibt sich $-P$.

   Q.E.D.

Bemerkung 16.13.4. *Der Satz gilt entsprechend für a–Stellen, $a \in \mathbb{C}$*

dazu betrachte man

$$\tilde{f}(z) := f(z) - a$$

$$Dann: \ N_A - P = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)-a} dz$$

Anwendung: Fundamentalsatz der Algebra

Satz 16.13.5 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Ein Polynom n–ten Grades besitzt genau n (komplexe) Nullstellen.*

Beweis.

(i)

$$\exists r > 0 : \ \forall z, |z| \geq r : \ |P_n(z)| > 1$$

$\Rightarrow$ alle Nullstellen liegen in $B(0, r)$

(ii) $P_n(z) = a_n z^n + \ldots + a_0, \ a_n \neq 0$

$P_n'(z) = n a_n z^{n-1} + \ldots + a_1$

$$\frac{P_n'(z)}{P_n(z)} = \frac{n}{z} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{c_j}{z^j}, \qquad c_j \text{ geeignet}$$

$$N = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{P_n'(z)}{P_n(z)} dz = n$$

Q.E.D.

Bemerkung 16.13.6. *Man kann ein Residuum auch in $z = \infty$ erklären für eine Funktion $f = f(z)$ über*

$$\mathrm{res}_{z=\infty} f(z) := \mathrm{res}_{w=0} \left\{ -\frac{1}{w^2} f(\frac{1}{w}) \right\}$$

Diese Definition mit $-\frac{1}{w^2}$ motiviert sich aus den folgenden Betrachtungen:

$$f(z) = \frac{1}{z}$$
$$f(\frac{1}{w}) = w \text{ holomorph in } w = 0$$
$$\mathrm{res}_{z=\infty} f(z) := \mathrm{res}_{w=0} \left\{ -\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) \right\} = \mathrm{res}_{w=0} - \frac{1}{w} = -1$$
$$\mathrm{res}_{z=0} f(z) = 1$$
$$\sum_{z=0,\infty} \mathrm{res}_z f(z) = 0$$

Auch:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \quad \widetilde{F}(w) := -\frac{1}{w^2} f(\frac{1}{w})$$

$$\Rightarrow F(w) = -\frac{1}{w^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n w^{-n} = -\frac{1}{w^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{-n} w^n = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{-n} w^{n-2}$$

Dann ist $a_{-1}(\widetilde{F}, w = 0) = -a_{-1}(f, z = 0)$. Außerdem:

$$z = \frac{1}{w} \;\Rightarrow\; dz = -\frac{1}{w^2} dw$$

Allgemein gilt für die Summe der Residuen

$$\sum_{z_i \in \hat{\mathbb{C}} \text{ singulär}} \mathrm{res}_{z=z_i} f(z) = 0$$

Als Anwendung des Residuenkalküls zur Berechnung von reellen Integralen folgen einige

Beispiele 16.13.7.

1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$$
$$f(z) := \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right)$$

Singularitäten: $1 + z^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; z_1 = i \vee z_2 = -i$

$\mathrm{res}_{z=1} f(z) = \frac{1}{2i}$, *da* $-\frac{1}{2i(z+i)}$ *holomorph in* $U(i)$.

$$H_R = \{z \in \mathbb{C} | \; |z| < R, \Im(z) > 0\}$$

Ohne Einschränkung: $R > 1$

$$\int_{\partial H_R} f(z) = 2\pi i \cdot \mathrm{res}_{z=i} f(z) = \pi$$

a)

$$\left|\int_{|z|=R\ \Im(z)>0} f(z)dz\right| \leq \int_0^\pi \frac{R}{R^2-1}d\phi = \frac{R\pi}{R^2-1} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$(z = Re^{i\phi},\ dz = izd\phi,\ |1+z^2| \geq |z|^2 - 1 = R^2 - z,\ 0 \leq \phi \leq \pi)$

b)

$$\int_{z=x\in[-R,R]} f(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^2}dx \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$\pi = \oint_{\partial H_R} f(z)dz \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \pi$$

2.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^6}dx = \frac{2}{3}\pi$$

$$f(z) := \frac{1}{1+z^6}$$

Singularitäten: $1+z^6 = 0 \Leftrightarrow\ z^6 = -1 = e^{\pi i + 2k\pi i},\ k \in \mathbb{N} \Rightarrow z_k = e^{\frac{\pi i}{6}(1+2k)},\ k = 0, \ldots, 5$

Ohne Einschränkung: $R > 1$.

$1 + z^6 = \underbrace{1 + z_R^6}_{=0} - z_k^6 + z^6$

$$= z^6 - z_k^6 = (z - z_k)(z^5 + z^4 z_k + \ldots + z_k^5)$$

$$\mathrm{res}_{z=z_k} f(z) = \mathrm{res}_{z=z_k}\left\{\frac{1}{1+z^6}\right\} = \mathrm{res}_{z=z_k}\left\{\frac{1}{z^5 + z^4 z_k + \ldots + z_k^5} \cdot \frac{1}{z - z_k}\right\}$$

$$= \frac{1}{6z_k^5} = \frac{z_k}{6z_k^6} = -\frac{1}{6}z_k$$

$$\sum_{k=0}^{2} \mathrm{res}_{z=z_k} f(z) = -\frac{1}{6}(z_0 + z_1 + z_2) = -\frac{1}{6}\left(e^{\frac{pi}{6}} + i + e^{\frac{\pi i}{6} + 2\pi\frac{i}{3}}\right)$$

$$= -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i + i - \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i\right) = -\frac{1}{3}i$$

$$\Rightarrow \int_{\partial H_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{2} \mathrm{res}_{z=z_h} f(z) = 2\pi i(-\frac{1}{3}i) = \frac{2}{3}\pi$$

a)

$$\left|\int_{|z|=R,\ \Im(z)>0} f(z)dz\right| \leq \int_0^\pi \frac{R}{R^6-1}d\phi = \frac{R\pi}{R^6-1} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$(z = Re^{i\phi},\ dz = izd\phi,\ 0 \leq \phi \leq \pi,\ |1+z^6| \geq R^6 - 1)$

(b)

$$\int_{z=x\in[-R,R]} f(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^6}dx \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^6}dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^6}dx = \frac{2\pi}{3}$$

3.

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\sin\phi} d\phi,\ a>1$$

$$z := e^{i\phi}\ \Rightarrow dz = iz d\phi$$

$$\sin\phi = \frac{1}{2i}\left(e^{i\phi} - e^{-i\phi}\right) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\sin\phi} d\phi = \int_{|z|=1} \frac{1}{a + \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)} \cdot \frac{dz}{iz}$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{2}{z^2+2aiz-1} dz$$

Singularitäten: $z^2 + 2aiz - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow\ z_{1,2} = \frac{-2ai \pm \sqrt{-4a^2+4}}{2} = i(-a \pm \sqrt{a^2-1})$$

a)

$$z_2 i \underbrace{\left(-a - \sqrt{a^2-1}\right)}_{<-1}$$

$\Rightarrow |z_2| > 1,\ z_2 \notin \overline{B(0,1)}$

b)

$$z_1 := i \underbrace{\left(-a + \sqrt{a^2-1}\right)}_{<1}$$

$$\sqrt{a^2-1} - a > -1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2-1} > a-1 > 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 1 > (a-1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2(a-1) > 0 \Rightarrow |z_1| < 1,\ z_1 \in \overline{B(0,1)}$$

$$\oint_{|z|=1} \underbrace{\frac{2}{z^2+1aiz-1}}_{:=f(z)} = 2\pi i \mathrm{res}_{z=z_1} f(z)$$

$$= 2\pi i \mathrm{res}_{z=z_1} \left\{ \frac{2}{(z-z_2)(z-z_1)} \right\}$$

$$= 2\pi i \frac{2}{z_1 - z_2} = 2\pi i \frac{2}{2i\sqrt{a^2-1}}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

4.

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+b\cos\phi} d\phi;\ a,b \in \mathbb{R},\ a>b>0$$

$$z := e^{i\phi}\ \Rightarrow\ dz = iz\ d\phi\ \Rightarrow\ \cos\ \phi = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+b\cos\phi} d\phi = \oint_{|z|=1} \frac{1}{a + b\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})} \cdot \frac{dz}{iz}$$

$$= \frac{2}{ib} \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2 + 2\frac{a}{b}z + 1} dz$$

Singularitäten:

$$z^2 + 2\frac{a}{b}z + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \; z_{1,2} = -\frac{a}{b} \pm \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}$$

$$\Rightarrow \; |z_1| < 1 \wedge |z_2| > 2$$

$$\frac{2}{ib} \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2 + 2\frac{a}{b}z + 1} dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=z_1} f(z)$$

$$= 2\pi i \operatorname{res}_{z=z_1} \left\{ \frac{2}{ib} \cdot \frac{1}{(z-z_2)(z-z_1)} \right\}$$

$$= 2\pi i \left(\frac{2}{ib} \cdot \frac{1}{z_1 - z_2} \right) = 2\pi i \frac{2}{ib} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b\cos(\phi)} d\phi = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

5.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{1 + x^2} dx, \; \alpha \geq 0$$

Ohne Einschränkung: $R > 1$

$$f(z) = \frac{e^{i\alpha z}}{1 + z^2}$$

Wir wählen den gleichen Integrationsweg wie unter 1.:

a)

$$\left| \int_{|z|=R,\, \Im(z)>0} f(z) dz \right| \overset{z=x+iy}{=} \left| \int_{|z|=R,\, \Im(z)>0} \frac{e^{i\alpha x} e^{-\alpha y}}{1 + z^2} dz \right|$$

$$\leq \int_{|z|=R,\, \Im(z)>0} \frac{\overbrace{|e^{i\alpha x}|}^{=1} \overbrace{|e^{-\alpha y}|}^{\leq 1}}{\underbrace{|1 + z^2|}_{\geq R^2 - 1}} |iRe^{i\phi}| d\phi \leq \int_0^{\pi} \frac{R}{R^2 - 1} d\phi \overset{R \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

($z = Re^{i\phi}$*,* $dz = iz d\phi$*,* $0 \leq \phi \leq \pi$*)*

b)

$$\int_{z=x\in[-R,R]} \frac{e^{i\alpha z}}{1 + z^2} dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{i\alpha x}}{1 + x^2} dx$$

$e^{i\alpha x} = cos\alpha x + i \sin \alpha x$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{\cos \alpha x}{1 + x^2} dx + i \underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{\sin \alpha x}{1 + x^2} dx}_{=0}$$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{\cos \alpha x}{1 + x^2} dx \overset{R \to \infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{1 + x^2} d$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{cos(\alpha x)}{1+x^2}dx = \int_{\partial H} f(z)dz = 2\pi i \text{res}_{z=i} f(z)$$
$$= 2\pi i \text{res}_{z=i} \left(\frac{e^{i\alpha z}}{z+i} \cdot \frac{1}{z-i} \right)$$
$$= 2\pi i \frac{e^{i\alpha i}}{i+i} = \pi e^{-\alpha}$$
$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}dx = \pi e^{-\alpha}$$

6.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \pi$$

keine Singularität in $x = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Daher ist das uneigentliche Integral existent.

$$f(z) := \frac{e^{iz}}{z}$$

Singularität in $z = 0$: $z = iy \quad \Rightarrow f(z) = \frac{e^{-y}}{iy} \overset{y\longrightarrow 0}{\longrightarrow} \infty$. Als Integrationsweg wählen wir $\partial W_R = \Gamma := \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$ mit

$$\Gamma_1 : t \in [0,1] \mapsto \gamma_1(t) := R + iRt; \quad \Gamma_2 : t \in [0,1] \mapsto \gamma_2(t) := R(1-2t) + iR$$

$$\Gamma_3 : t \in [0,1] \mapsto \gamma_3(t) := -R+iR(1-t); \quad \Gamma_4 := \{z | \Im z = 0, \epsilon \le |z| \le R\} \cup \{z = \epsilon e^{i\phi} | 0 \le \phi \le \pi\}$$

Wobei Γ_4 von “$-$“ nach “$+$“ durchlaufen wird.

(a)

$$\int_{\partial W_R} f(z)dz = 0 \text{ da } f \text{ holomorph in } U(W_R)$$

(b)

$$\left| \int_{\Gamma_1} f(z)dz \right| \le | \int_0^R \frac{e^{iR-y}}{R+iy} idy|$$

($z = x+iy,\ x = R,\ 0 < y < R,\ \frac{dz}{dy} = i$)

$$\le \int_0^R \frac{e^{-y}}{R}dy = \frac{1-e^{-R}}{R} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

analog:

$$\left| \int_{\Gamma_3} f(z)dz \right| \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(c)

$$\left| \int_{\Gamma_2} f(z)dz \right| = | \int_{-R}^R \frac{e^{ix-R}}{x+iR}dx|$$

($z = x+iy,\ -R < x < R,\ y = R,\ \frac{dz}{dx} = 1$)

$$\le \int_{-R}^R \frac{e^{-R}}{R}dx = 2e^{-R} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(d)

$$\int_{\Gamma_4} f(z)dz = -\int_0^\pi \frac{e^{i\varepsilon e^{i\phi}}}{\varepsilon e^{i\phi}} i\varepsilon e^{i\phi} d\phi + \textit{Gerade Stücke (s.u.)}$$

($z = \varepsilon e^{i\phi}$ $0 < \phi < \pi$ $\frac{dz}{d\phi} = iz$)

$$= -\int_0^\pi (1 + i\varepsilon e^{i\phi} + O(\varepsilon^2))d\phi$$

$$= -i\pi + O(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} -i\pi$$

(e)

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_\varepsilon^R \frac{e^{ix}}{x}dx$$

$$= -\int_\varepsilon^R \frac{e^{-ix}}{x}dx + \int_\varepsilon^R \frac{e^{ix}}{x}dx$$

$$\xrightarrow{\varepsilon\to 0,\ R\to\infty} 2i\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = i\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x}dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x}dx = i(-i\pi) = \pi$$

7.

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x)^3}dx = -\frac{1}{2}$$

$$f(z) := \frac{(\ln z)^2}{(1+z)^3}$$

Ohne Einschränkung $R > 1$

$$f(z) =: R(z)\cdot(\ln z)^2,\ R(z) := \frac{1}{(1+z)^3}$$

(Wobei der Hauptzweig des ln gewählt wird.) Sei

$$W_R := (\overline{B(0,R)} \setminus \{z = x+iy \in \overline{B(0,R)} | x > 0, |y| < \frac{1}{R}\}) \cup \{z = \frac{1}{R}e^{i\phi} | \frac{\pi}{2} \le \phi \le \frac{3\pi}{2}\}$$

Für die folgende Integration setzen wir ∂W_R zusammen aus $\Gamma_1 := \{z \in \partial W_R |\ |z| = R\}$, $\Gamma_2 := \{z \in \partial W_R |\ |z| = \frac{1}{R}\}$ und Γ_3.

(a)

$$\int_{\partial W_R} f(z)dz = [\mathrm{res}_{z=-1} f(z)]\cdot 2\pi i$$

$$f(z) = \frac{b_0 + b_1(z+1) + b_2(z+1)^2 + \dots}{(1+z)^3}$$

$$b_2 = \mathrm{res}_{z=-1} f(z) = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}(\ln z)^2\big|_{z=-1} = \frac{d}{dz}\frac{\ln z}{z}\big|_{z=-1}$$

$$= \frac{1-\ln z}{z^2}\big|_{z=-1} = 1 - i\pi$$

$$\Rightarrow \int_{\partial W_R} f(z)dz = 2\pi i + 2\pi^2$$

(b)

$$\left|\int_{\Gamma_1} f(z)dz\right| \leq const \cdot \frac{R(lnR+2\pi)^2}{(R-1)^3} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

($z = Re^{i\phi}$, $\frac{dz}{d\phi} = iz$, $|\ln z| \leq \ln|z| + 2\pi = \ln R + 2\pi$)

(c)

$$|\int_{\Gamma_2} f(z)dz| \leq \int_{\Gamma_2} \frac{|lnz|}{|(1+z)^3|}dz \leq const \cdot \frac{1}{R}\frac{(\ln\frac{1}{R})^2+4\pi^2}{(1-\frac{1}{R})^3} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$(|\ln z| \leq \ln\frac{1}{R} + 2\pi,\ |\ln z|^2 \leq (\ln\frac{1}{R}+2\pi)^2 \leq 2(\ln\frac{1}{R})^2 + 8\pi^2,\ (a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2))$

(d)

$$\int_{\Gamma_3} f(z)dz \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^\infty R(x)[(\ln x)^2 - (\ln x + 2\pi i)^2]dx$$

$$= -4\pi i \int_0^\infty R(x)\ln x dx + 4\pi^2 \int_0^\infty R(x)dx$$

$$\Rightarrow 2\pi i + 2\pi^2 = -4\pi \int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x)^3}dx + 4\pi^2 \int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^3}dx$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x)^3}dx = -\frac{1}{2},\ \int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^3}dx = \frac{1}{2}$$

8.

$$\int_0^\infty \sin(x^2)dx = \int_0^\infty \cos(x^2)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

(Fresnelsche Integrale)

$$f(z) := e^{-z^2};\ W_R := \{z \in \overline{B(0,R)} | 0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{4}\}$$

Wir integrieren längs ∂W_R mit $\Gamma_1 := \{z \in \partial W_R | \Im(z) = 0\}$, $\Gamma_2 := \{z \in \partial W_R|\ |z| = R\}$ und $\Gamma_3 := \{z \in \partial W_R | \arg(z) = \frac{\pi}{4}\}$.

(a)

$$\int_{\partial W_R} f(z)dz = 0$$

(b)

$$\int_{\Gamma_1} e^{-x^2}dx = \int_0^R e^{-x^2}dx \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(c)

$$\int_{\Gamma_2} f(z)dz\ = iR\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\cos 2\phi} e^{i(\phi - R^2\sin 2\phi)}d\phi$$

($z = Re^{i\phi}$, $0 < \phi < \frac{\pi}{4}$, $z^2 - R^2e^{2i\phi} = R^2(\cos 2\phi + i\sin 2\phi)$, $\frac{dz}{d\phi} = iz$)

$$\Rightarrow \left|\int_{\Gamma_2} f(z)dz\right| \leq R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\cos 2\phi d\phi}$$

$$= \frac{R}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2\cos\psi}d\psi$$

$$\leq \frac{R}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2(1-\frac{2}{\pi}\psi)}d\psi$$

($\psi = 2\phi,\ \frac{d\phi}{d\psi} = \frac{1}{2}$, in $[0, \frac{\pi}{2}]$ gilt $\cos(\psi) \geq 1 - \frac{2\psi}{\pi}$ (anschaulich klar))

$$= \frac{R}{2} e^{-R^2} \frac{\pi}{2R^2} \left[e^{\frac{2R^2}{\pi}\psi} \right]_{\psi=0}^{\psi=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4R} e^{-R^2}(e^{R^2} - 1) \leq \frac{\pi}{4R} \stackrel{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(d)

$$\int_{\Gamma_3} f(z)dz = e^{i\frac{\pi}{4}} \int_R^0 e^{-ir^2} dr$$

($z = re^{i\frac{\pi}{4}},\ 0 < r < R,\ \frac{dz}{dr} = e^{\frac{i\pi}{4}},\ z^2 = r^2 e^{\frac{i\pi}{2}} = ir^2$)

$$= -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^R e^{-ir^2} dr$$

$$= -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^R (\cos r^2 - i \sin r^2) dr$$

$$\stackrel{R\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_0^\infty \cos r^2 dr + \int_0^\infty \sin r^2 dr \right) - \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\int_0^\infty \cos r^2 dr - \int_0^\infty \sin r^2 dr \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_0^\infty \cos r^2 dr + \int_0^\infty \sin r^2 dr \right) + \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\int_0^\infty \cos r^2 dr - \int_0^\infty \sin r^2 dr \right)$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \sin r^2 dr = \int_0^\infty \cos r^2 dr = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

9.

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^{n+1}}$$

$z = a$ sei Pol $n+1$. Ordnung von f(z).

$$\Rightarrow \mathrm{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} g(z)\Big|_{z=a}$$

16.14 Konforme Abbildungen: Der Riemannsche Abbildungssatz

Erinnerung $f: G_1 \longrightarrow G_2$, G_i: Gebiet, heißt **konform**, falls f biholomorph ist, insbesondere ist f winkeltreu und „maßstabstreu im kleinen“.

Definition 16.14.1.
*Ein Gebiet G_1 heißt **konform äquivalent** zu G_2, wenn es eine konforme Abbildung $f : G_1 \longrightarrow G_2$ gibt.*

Ziele:

1. Bestimmung von Klassen konform äquivalenter Gebiete (sogenannte konforme Äquivalenzklassen).
2. Bestimmung aller konformen Abbildungen zu zwei konform äquivalenten Gebieten.

ad 1. Finde Normgebiete als Repräsentanten.

ad 2. Finde dann alle konformen Abbildungen des Normgebietes auf sich:

f gegeben: $G_1 \xrightarrow{f} G_2$, $G_1 \xrightarrow{h_1} N$, $G_2 \xrightarrow{h_2} N$

$\Rightarrow h_2 \circ f \circ h_1^{-1} : \ N \longrightarrow N$ konform.

h gegeben: $G_1 \xrightarrow{h_1} N \xrightarrow{h} N \xleftarrow{h_2} G_2 \Rightarrow \ h_2^{-1} \circ f \circ h_1 : \ G_1 \longrightarrow G_2$ holomorph

d.h. Bestimmung der sogenannten **Automorphismengruppe**.

Zunächst einige Resultate, von denen wir $\star$ beweisen werden.

	Normgebiet	*Automorphismengruppe*
	$\mathbb{C}$	$w = az + b, \ a \neq 0$
	$\hat{\mathbb{C}}$	$w = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $\lvert ad - bc\rvert = 1$ (Möbius–Transformation)
$\star$	$B(0,1)$	$w = \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}$ mit $a\overline{a} - b\overline{b} = 1$
	$\mathbb{C} \setminus \{0\}$	$w_{1,2} = az^{\pm 1}$, $a \neq 0$
	$B(0,1) \setminus \{0\}$	$w = e^{i\phi} z, \ \phi \in \mathbb{R}$
	$\{z \in \mathbb{C} \big\vert \frac{1}{r} < \lvert z\rvert < r\}$ $(r > 1)$	$w_{1,2} = e^{i\phi} z^{\pm 1}, \ \phi \in \mathbb{R}$

Satz 16.14.2. *Die Automorphismengruppe des Einheitskreises besteht aus den Abbildungen der Form*

$$w = \frac{az+b}{\overline{b}z + \overline{a}} \ \textit{und} \ |a|^2 - |b|^2 = 1$$

Beweis.

(i) Sei $F(z) = \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}$ mit $|a|^2 - |b|^2 = 1$

$f : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ bijektiv (Möbiustransformation).

Die Singularität von f liegt bei $-\frac{\overline{a}}{\overline{b}}$, doch $\frac{\overline{a}}{\overline{b}} \notin B(0,1)$. Zu zeigen:

$$|z| \left\{ \begin{array}{c} <1 \\ =1 \\ >1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow |f(z)| = \left\{ \begin{array}{c} <1 \\ =1 \\ >1 \end{array} \right\}$$

Beweis:

$$1 - |f(z)|^2 = 1 - \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}} \cdot \frac{\overline{az}+\overline{b}}{b\overline{z}+a}$$

$$= \frac{|b\overline{z}|^2 + \overline{a}b\overline{z} + a\overline{b}z + |a|^2 - |az|^2 - az\overline{b} - \overline{az}b - |b|^2}{|b\overline{z}+\overline{a}|^2}$$

weil $|a|^2 - |b|^2 = 1$

$$= \frac{1-|z|^2}{|b\overline{z}+\overline{a}|^2} \left\{ \begin{array}{c} >0 \\ =0 \\ <0 \end{array} \right\} \text{ falls } 1 - |z|^2 \left\{ \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} \right\} 0$$

(ii) Sei f Automorphismus mit $f(0) = 0$

Dann folgt mit dem Schwarzschen Lemma: $|f(z)| \leq |z|$

$|f'(0)| \leq 1;\ f'(0) \neq 0$ (f konform)

Sei $g := f^{-1}$, dann ist (wieder mit dem schwarzschen Lemma):

$$|g'(0)| \leq 1,\ g'(0) \neq 0$$

$$g \circ f = \mathrm{Id} \ \Rightarrow\ 1 = g'(0)f'(0)$$

$$\Rightarrow\ |g'(0)| = |f'(0)| = 1 \Rightarrow \exists \phi \in \mathbb{R}:\ f(z) = e^{i\phi}z = \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}} \text{ mit } b = 0,\ a = e^{i\phi/2},\ |a|^2 - |b|^2 = 1$$

(iii) Sei nun g beliebiger Automorphismus mit $g(0) = c \in B(0,1)$.

$$h(z) := \frac{z-c}{1-\bar{c}z} \text{ ist nach (i) Automorphismus mit } h(c) = 0$$

$$\left(\text{Setze: } a = \frac{1}{\sqrt{1-|c|^2}},\ b = \frac{-c}{\sqrt{1-|c|^2}}\right)$$

$$\Rightarrow\ h \circ g \text{ ist Automorphismus mit } h \circ g(0) = 0$$

$$\overset{(ii)}{\Longrightarrow} \exists\ \phi \in \mathbb{R}:\ h \circ g(z) = e^{i\phi}z$$

$$\Rightarrow\ g(z) = h^{-1}(e^{i\phi}z) = \frac{e^{i\phi}z + c}{\bar{c}e^{i\phi}z + 1} = \frac{e^{i\phi/2}z + ce^{-i\phi/2}}{\bar{c}e^{i\phi/2}z + e^{-i\phi/2}}$$

$$= \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}} \text{ mit } a = \frac{e^{i\phi/2}}{\sqrt{1-|c|^2}},\ b = \frac{ce^{-i\phi/2}}{\sqrt{1-|c|^2}}$$

Q.E.D.

Satz 16.14.3 (Riemannscher Abbildungssatz)**.** *Sei $G \subsetneq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend. Dann ist G konform äquivalent zum Einheitskreis $B(0,1)$.*

Zum Beweis werden wir nur ein paar Bausteine zusammentragen. Zunächst betrachten wir jedoch die folgende Variante, eine Folgerung aus dem Riemannschen Abbildungssatz.

Satz 16.14.4. *$G \subsetneq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, $z_0 \in G$. Dann gibt es genau ein $f : G \longrightarrow B(0,1)$, f konform mit $f(z_0) = 0,\ f'(z_0) > 0$.*

Beweis. Existenz:

Nach dem Riemannschen Abbildungssatz gibt es $f_0 :\ G \longrightarrow B(0,1)$ konform mit $f_0(z_0) = z_1 \ni B(0,1)$.

Sei

$$h(z) = \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z}$$

Dann ist h(z) Automorphismus von $B(0,1)$ mit $h(z_1) = 0$. (s. Beweis zur Automorphismengruppe des Einheitskreises)

$$\Rightarrow \tilde{f}_0:\ h \circ f_0:\ G \longrightarrow B(0,1)$$

konform mit

$$\tilde{f}_0(z_0) = 0$$

Es ist

$$\tilde{f}_0'(z_0) \neq 0, \text{ aber möglicherweise komplex. Sei also } \tilde{f}_0'(z_0) = z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \phi := \arg(z) \in [0, 2\pi)$$

Dann ist

$$q(z) := e^{-i\phi} z$$

Automorphismus von $B(0,1)$ mit $q(0) = 0$, $q(z_2) = |z_2| > 0$
Sei

$$f_1(z) := q(\tilde{f}_0(z))$$

$\Rightarrow f_1 : \ G \longrightarrow B(0,1)$ konform mit $f_1(z_0) = 0$ und

$$\tilde{f}_1'(z_0) = q'(0) \cdot \tilde{f}_0'(z_0) = e^{-i\phi} z_2 = |z_2| > 0$$

$\square$

Eindeutigkeit:
Seien $f_1, \ f_2 : \ G \longrightarrow B(0,1)$ konform mit $f_1(z_0) = 0 = f_2(z_0), \ f_j'(z_0) = p_j > 0$
$\Rightarrow g := f_2 \circ f_1^{-1}$: Automorphismus von $B(0,1)$ mit $g(0) = 0$,

$$g'(0) = \frac{f_2'(z_0)}{f_1'(z_0)} = \frac{p_2}{p_1} > 0.$$

Allgemein:

$$g(z) = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}, \ |a|^2 - |b|^2 = 1;$$

$$g(0) = 0 \Rightarrow \ b = 0 \ \Rightarrow \ |a| = 1, g(z) = \frac{a}{\bar{a}} z$$

Wegen $0 < g'(0) = \frac{a}{\bar{a}} = \frac{a^2}{|a|^2}$ muß a reell sein, d.h. $g(z) = z$.

$$\Rightarrow f_2 \circ f_1^{-1} = Id \Rightarrow f_2 = f_1$$

Q.E.D.

Wir bemerken, dass Homöomorphismen einfach zusammenhängede Gebiete in ebensolche überführen, und dass ein einfach zusammenhängendes Gebiet $G \subsetneq \mathbb{C}$ konform äquivalent zu einem einfach zusammenhängenden *beschränkten* Gebiet ist. Zum Beweis des Letzteren benutzt man schon alle Voraussetzungen im Riemannschen Abbildungssatz ($G \subsetneq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend), um u.a. auf die Existenz eines Weges Γ von einem Punkt $a \in \mathbb{C} \setminus G$ nach ∞ zu schließen, der ganz in $\mathbb{C} \setminus G$ verläuft, längs dessen man die Ebene aufschneiden kann, um dann die Funktion $z \mapsto \sqrt{z - a}$ eindeutig erklären zu können.
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir auch $0 \in G \subset B(0,1)$ an.

Mit Hilfe von Auswahl- bzw. Konvergenzeigenschaften bei Folgen/Familien holomorpher Funktionen (Stichwort: „normale“ Familien) zeigt man schließlich, dass die Familie

$$\mathcal{F} := \{\, f : G \longrightarrow B(0,1) \,|\, f \text{ injektiv, holomorph, } f(0) = 0,\ f'(0) > 0 \,\}$$

eine gegen eine Funktion f konvergente Teilfolge enthält. Von diesem f weist man die Surjektivität nach und hat die für den Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes gesucht Funktion gefunden.

Index