Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statsitik
Johannes Schropp
Jan Rohleff

Wintersemester 2024/2025

Numerik partieller Differentialgleichungen I

https://www.math.uni-konstanz.de/~rohleff/numpde1.html

5. Übungsblatt

Ausgabe: 23.01.2025, Abgabe: 30.01.2025

Aufgabe 5.1 (Theorie - 6 Punkte)

Beweisen Sie das *Lemma von Aubin-Nitsche* in der folgenden Form: Besitzt das *duale Problem*

$$a(v,z) = b(v) = \int_\Omega g \cdot v \; dx \quad \forall v \in V$$

für $g \in L^2(\Omega)$ eine Lösung $z \in H^2(\Omega)$ mit

$$\|z\|_2 := \|z\|_{H^2} \;\leq\; C_1 \; \|g\|_0 \tag{1}$$

für ein $C_1 > 0$ und

$$\min_{w \in V_h} \|z - w\|_1 \;\leq\; C_2 \; h \; \|D^2 z\|_0 \tag{2}$$

für ein $C_2 > 0$, wobei

$$\|D^2 z\|_0 := \Big(\sum_{|\alpha|=2} \int_\Omega |\partial^\alpha z|^2 \; dx \Big)^{\frac{1}{2}},$$

so gilt:

$$\|\overline{u} - u_h\|_0 \;\leq\; C \; h \; \|\overline{u} - u_h\|_1$$

für ein $C > 0$.

Aufgabe 5.2 (Theorie - 6 Punkte)

a) Es sei $\Omega =]0,1[$, und es sei

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_0^1 u'(x) \; v'(x) \; dx, \\ \langle u,v \rangle_0 &= \int_0^1 u(x) \; v(x) \; dx. \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Die Normen $\| u \|_0 = \langle u,u \rangle_0^{1/2}$ und $\| u \|_a = a(u,u)^{1/2}$ sind nicht äquivalent, d.h. es gibt kein $C > 0$ mit $\| u \|_a \leq \; C \; \| u \|_0$.

Hinweis: Man betrachte die Funktionenfamilie $v_n : \Omega \to \mathbb{R}, n \geq 2$ definiert durch

$$v_n(x) \;=\; \begin{cases} nx, & \text{falls } 0 \leq x < \frac{1}{n}, \\ 1, & \text{falls } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 - \frac{1}{n}, \\ n - nx, & \text{falls } 1 - \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

b) Vorgelegt sei die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4}{\partial x_1^4}u + 2\frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}u + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4}u &= g \text{ in } \Omega, \\ u\,|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

mit $g \in C(\bar{\Omega})$. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sei ein beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand $\partial\Omega$, welches die strikte Kegelbedingung erfülle. Leiten Sie die zu (3) gehörige schwache Formulierung ab.

Hinweis: Für $V := \{u \in H^2(\Omega) \,|\, v = \nabla v \cdot n = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$ darf die Dichtheit von C_0^∞ in V bzgl. $\|\cdot\|_{H^2}$ benutzt werden.

Aufgabe 5.3 **(Programm - 8 Punkte)**

Gegeben sei die im Ort eindimensionale *Reaktion-Transport-Gleichung*

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} - ku && \text{in } \Omega \times [0,T], \\ u(x,0) &= 1 - x, && \text{in } \Omega, \\ u(a,t) &= 1 && \text{in } [0,T], \\ u(b,t) &= 0 && \text{in } [0,T], \end{aligned} \tag{4}$$

für $\Omega = (a,b)$. Lösen Sie das zu (4) gehörige Liniensystem mit dem ϑ-*Verfahren.* Schreiben Sie hierzu eine Matlab/Python-Funktion

```
function [U,dx,dt,q] = thetamethod(M,a,b,N,T,k,theta)
```

die eine Lösungsmatrix $U \in \mathbb{R}^{(M+1)\times(N+1)}$ entsprechend der Diskretisierung (inklusive der Werte auf dem Rand!), die örtliche und zeitliche Diskretisierungschittweite Δx und Δt, als auch den Quotienten aus Zeitschrittweite und dem Quadrat der Ortsschrittweite

$$q = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \tag{5}$$

zurückgibt. Als Übergabewerte soll die Funktion **ausschließlich und in dieser Reihenfolge** die Anzahl an diskreten Ortsschritten M, die Intervallgrenzen a und b, die Anzahl an diskreten Zeitschritten N, den Endzeitpunkt T, die Dämpfung k sowie den Parameter ϑ akzeptieren. Rufen Sie diese Funktion in einem File `main.m` für $a = 0$, $b = 1$, $T = 0.1$ und $k = 10$, sowie verschiedene

$$\begin{aligned} M &\in \mathcal{M} = \{20, 40\}, \\ N &\in \mathcal{N} = \{1, 10, 100, 1000\}, \\ \vartheta &\in \Theta = \{0, 0.5, 1\}, \end{aligned}$$

auf. Plotten Sie anschließend **für jede Kombination** $(M,\vartheta) \in \mathcal{M} \times \Theta$ die zugehörigen Lösungen für alle $N \in \mathcal{N}$ jeweils nur am Endzeitpunkt T zusammen in einem Plot. Stimmen ihre Beobachtungen mit der Theorie überein?