Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statsitik
Johannes Schropp
Jan Rohleff

Sommersemester 2024

Numerik partieller Differentialgleichungen II

https://www.math.uni-konstanz.de/~rohleff/numpde2.html

3. Übungsblatt

Ausgabe: 22.04.2024, Abgabe: 29.04.2024, bis 10.00 Uhr

Aufgabe 3.1 (Theorie - 12 Punkte)

Gegeben sei für $\lambda > 0$ das eindimensionale Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} -u''(x) + \lambda u(x) &= f(x), \quad x \in \Omega = (0,1), \\ u(0) = u(1) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

a) Leiten Sie für (1) die schwache Formulierung

$$a(u,\varphi) = b(\varphi) \quad \text{für alle} \quad \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

her. Hinweis: Bis auf den $u(x)$-Term in der ersten Zeile von (1) geht dies analog zum zweidimensionalen Fall aus der Vorlesung.

b) Gegeben sei nun eine beliebige Diskretisierung des Intervalls Ω:

$$\Omega_h = \{x_1, \dots, x_m\}, \quad x_i \in (0,1).$$

Betrachten Sie für das zu (1) gehörige Galerkin-Verfahren *lineare Ansatz-Funktionen* φ_i, $i = 1, \dots, m$ (sogenannte „Hütchen-Funktionen", siehe Abbildung), welche die Eigenschaften

- $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$ $(1 \le i, j \le m)$,
- $\operatorname{supp}(\varphi_i) = [x_{i-1}, x_{i+1}]$ für $i = 1 \dots, m$, wobei $x_0 = 0$ und $x_{m+1} = 1$

erfüllen. Leiten Sie nun analog zum zweidimensionalen Fall für diesen Ansatz ein lineares Gleichungssystem in der Form

$$Ac = r, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad c, r \in \mathbb{R}^m$$

her, wobei

$$A = D + \lambda P, \quad D_{ij} = \int_\Omega \varphi_i' \varphi_j' \, dx, \quad P_{ij} = \int_\Omega \varphi_i \varphi_j \, dx \qquad (1 \le i, j \le m),$$
$$r_i = \int_\Omega f \varphi_i \, dx \qquad (1 \le i \le m).$$

Gehen Sie hierbei von einer konstanten rechten Seite aus, d. h. $f = k$, $k \in \mathbb{R}$. Konkret bedeutet dies:

(i) Definieren Sie sich die Hütchenfunktionen φ_i auf Ω.

(ii) Berechnen Sie die zugehörigen Ableitungen φ_i' auf Ω.

(iii) Berechnen Sie die Integrale

$$\int_\Omega \varphi_i' \varphi_j' \, dx, \quad \int_\Omega \varphi_i \varphi_j \, dx, \quad \int_\Omega f \varphi_i \, dx.$$

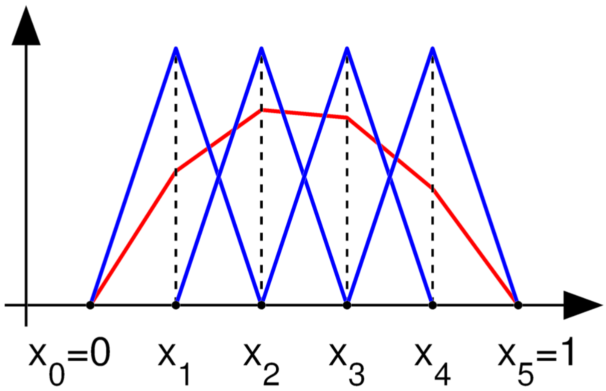

Abbildung 1: 1D lineare FE Ansatz-Funktionen.

Aufgabe 3.2 **(Programm - 9 Punkte)**

Vorgelegt sei die Reaktions-Transport-Gleichung

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} - ku, \quad 0 < x < 1,\, 0 < t < T, \\ u(x,0) &= 1 - x, \quad 0 < x < 1, \\ u(0,t) &= 1,\, u(1,t) = 0, \quad 0 \le t \le T. \end{aligned} \tag{2}$$

Lösen Sie für $k = 10, T = 0.1$ das zu (2) gehörige Liniensystem mit dem ϑ-Verfahren für $\vartheta = 0,\, 0.5,\, 1$ zu $\Delta x = 0.05,\, 0.025$ und $\Delta t = 10^{-j},\ j = 1, 2, 3, 4$.

Plotten Sie die Lösung in ein drei-dimensionales $(t, x, u(x,t))$-Diagramm.

Vergleichen Sie die Ergebnisse in Zusammenhang mit der Stabilität des ϑ-Verfahrens (vgl. Kapitel 2a) aus dem aktuellen Skript).

Schreiben Sie ein Report mit allen wichtigen Beobachtungen.