



Numerik partieller Differentialgleichungen II

<https://www.math.uni-konstanz.de/~rohleff/numpde2.html>

5. Übungsblatt

Ausgabe: 06.05.2024, Abgabe: 13.05.2024, bis 10.00 Uhr

Aufgabe 5.1 (Theorie - 6 Punkte)

Gegeben sei die zweidimensionale homogene Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u, \quad (x, y) \in \Omega = (0, 1)^2, \quad 0 < t < T, \\ u(x, y, 0) &= u_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad u(x, y, t)|_{\partial\Omega} = \gamma(x, y). \end{aligned} \quad (1)$$

- a) Leiten Sie das ϑ -Verfahren für (1) her, indem Sie analog zum 1D-Fall den Ausdruck $u_{xx} + u_{yy}$, $u|_{\partial\Omega} = \gamma$ mit dem klassischen Differenzenverfahren (zentrale Differenzen) mit $\Delta x = \Delta y = 1/M$ diskretisieren. Verwenden Sie dabei eine zeilenweise von links unten nach rechts oben laufende Nummerierung für das numerische Ortsgitter.
- b) Zeigen Sie: Das ϑ -Verfahren für (1) ist bezüglich der Maximumsnorm stabil, falls

$$\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{4(1 - \vartheta)}$$

gilt.

Hinweis: Lemma 2.4 aus der Vorlesung und Theorie für M -Matrizen.

Aufgabe 5.2 (Theorie - 6 Punkte)

Betrachten Sie zu

$$u' = f(t, u), \quad u(t_0) = \alpha$$

mit f p -mal stetig differenzierbar das lineare Mehrschrittverfahren

$$\frac{1}{h} \sum_{i=0}^k a_i u_{j+i} = \sum_{i=0}^k b_i f(t_{j+i}, u_{j+i}), \quad j = 0, \dots, \sigma(h) - k$$

für eine gegebene Schrittweite $h > 0$. Zeigen Sie: Erfüllen die Koeffizienten des Verfahrens die Bedingungen

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k a_i &= 0 \quad \text{und} \\ \sum_{i=0}^k \left(a_i \frac{i^l}{l!} - b_i \frac{i^{l-1}}{(l-1)!} \right) &= 0 \quad \text{für } l = 1, \dots, p, \end{aligned}$$

so besitzt das Verfahren die Konsistenzordnung p . Dabei sei vorausgesetzt, dass für die ersten $k - 1$ Schritte mindestens eine $O(h^p)$ -Approximation vorliegt.

Aufgabe 5.3 (Programm - 9 Punkte)

- (i) Implementieren Sie das ϑ -Verfahren zum Liniensystem

$$w' = \Gamma w, \quad w(0) = w^0 \quad (2)$$

aus Aufgabe 1 mit $\gamma \equiv 0$. Setzen Sie $M = 40$ und testen Sie die drei Anfangswerte

$$u_0(x, y) = \begin{cases} 5, & \text{falls } |x - 0.5| + |y - 0.5| \leq 0.3, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$
$$u_0(x, y) = \begin{cases} 5, & \text{falls } (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 \leq 0.2, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$
$$u_0(x, y) = 5 \sin(2\pi x) \sin(2\pi y).$$

Lösen Sie damit die Aufgabe auf dem Zeitintervall $[0, T] = [0, 0.1]$ für $\vartheta = \frac{1}{2}$ und die Schrittweite $\Delta t = \frac{T}{400} = \frac{1}{4000}$, und plotten Sie die Lösung für jeden Zeitpunkt in ein geeignetes Schaubild (**drawnow** verwenden).

- (ii) Lösen Sie mit den gleichen Daten aus (i) erneut das System (2), dieses Mal aber mit dem BDF-Verfahren

$$\frac{1}{2}(3u_{j+2} - 4u_{j+1} + u_j) = \Delta t f(t_{j+2}, u_{j+2})$$

der Stufe $k = 2$. Verwenden Sie dabei für den ersten Schritt u_1 den aus (i) errechneten Wert mit dem ϑ -Verfahren für $\vartheta = \frac{1}{2}$.

Schreiben Sie einen Report mit Ihren Ergebnissen.