Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statsitik
Johannes Schropp
Jan Rohleff

Wintersemester 2023/2024

Numerik stochastischer Differentialgleichungen

https://www.math.uni-konstanz.de/~rohleff/numsde.html

2. Übungsblatt

Ausgabe: 13.11.2023, Abgabe: 20.11.2023, bis 10.00 Uhr

Aufgabe 2.1 (6 Punkte)

a) Die Entwicklung des Preises S_n einer Aktie werde annähernd beschrieben durch folgenden diskreten Prozess:

$$S_{n+1} = S_n + \mu S_n \Delta t + \sigma S_n (W_{t_{n+1}} - W_{t_n}), \qquad S_0 \in \mathbb{R},$$

wobei $(W_t)_{t\geq 0}$ die Brownsche Bewegung ist. Simulieren Sie in Matlab/Python für den Fall $S_0 = 1$, $\mu = 0.1$ und $\sigma = 0.4$ die Preisentwicklung mit 10000 Stützstellen auf dem Intervall [0,10]. Zeichnen Sie mehrere Preiskurven in ein gemeinsames Diagramm und berechnen Sie approximativ den Erwartungswert am Intervallende (durch eine große Anzahl von Pfaden, z. B. 1000 Stück).

b) Anstelle eines einzelnen masselosen Teilchens in einer Flüssigkeit betrachten wir nun zwei Teilchen x und y im $\mathbb{R}^3$, die durch Anziehungskräfte zusammengehalten werden. Das diskrete Bewegungsgleichungssystem dazu lautet

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + (y_n - x_n)\Delta t + \sqrt{\Delta t}\xi_n^{(x)}, \quad x_0 = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^3, \\ y_{n+1} &= y_n + (x_n - y_n)\Delta t + \sqrt{\Delta t}\xi_n^{(y)}, \quad y_0 = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

wobei $\xi_n^{(x)}$ und $\xi_n^{(y)}$ standard normalverteilte unabhängige Zufallsvektoren im $\mathbb{R}^3$ sind. Lösen Sie dieses System in Matlab/Python für das Zeitintervall [0,10] mit 2000 Stützstellen und erzeugen Sie analog zu Aufgabe 2, Blatt 1 eine Animation der Bewegung, wobei die Verbindungslinie zwischen den Teilchen eingezeichnet werden soll. Plotten Sie anschließend den zeitlichen Verlauf des Abstandes der beiden Teilchen in ein neues Schaubild.

Aufgabe 2.2 (6 Punkte)

Schreiben Sie ein Matlab-Programm zur approximativen Berechnung des stochastischen Integrals

$$I_t = \int_0^t f(s)\, dW_s, \quad t \in [0,1].$$

Zerlegen Sie dazu das Intervall $[0,1]$ in kleine Teilintervalle der Länge h (z. B. 1000 Stück) und approximieren Sie den Integranden f durch eine Treppenfunktion, wobei die Stufenhöhe der Treppenfunktion auf dem Teilintervall durch den Funktionswert von f am linken Intervallrand gegeben sein soll.

Testen Sie Ihr Programm mit $f(t) = 2\sin(2\pi t)$ und $f(t) = \exp(3t)$ und zeichnen Sie einige Pfade von I in ein Schaubild. Berechnen Sie außerdem durch Mittelung über eine große Anzahl von Pfaden ($p = 10000$) den Erwartungswert und die Varianz von I_1 approximativ (mittels den Matlab-Befehlen `mean` und `var` (Python `np.mean` und `np.var`)) und vergleichen Sie die Ergebnisse mit den exakten Werten.

Hinweis: Um bei der Berechnung Schleifen zu vermeiden, sind die Befehle `cumsum` (Python `np.cumsum`) und `repmat` (Python `np.tile`) hilfreich.

Aufgabe 2.3 **(6 Punkte)**

Gegeben sei die eindimensionale Brownsche Bewegung $(W_t)_{t\geq 0}$.

a) Zeigen Sie, dass $(W_t^2)_{0\leq t\leq T}$ ein Itô-Prozess ist und berechnen Sie damit das Integral

$$I_t = \int_0^t W_s \, dW_s.$$

b) Welche Differentialgleichung erfüllt der stochastische Prozess $Z_t = e^{W_t - t/2}$? Vergleichen Sie dazu den analogen analytischen Fall.

c) Wie lautet die Lösung der Differentialgleichung

$$dX_t = -X_t \, dt + \frac{1}{\sqrt{1+t}} \, dW_t, \quad X_0 = 0?$$

Bestimmen Sie damit $\lim_{t\to\infty} E(X_t)$ und $\lim_{t\to\infty} V(X_t)$.