Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statsitik
Johannes Schropp
Jan Rohleff

Wintersemester 2023/2024

Numerik stochastischer Differentialgleichungen

https://www.math.uni-konstanz.de/~rohleff/numsde.html

4. Übungsblatt

Ausgabe: 11.12.2023, Abgabe: 18.12.2023, bis 10.00 Uhr

Aufgabe 4.1 (6 Punkte)

Gegeben sei das sogenannte **Heston-Modell**

$$\begin{aligned} dS_t &= r(t)S_t dt + \sigma_t S_t dW_t^{(1)}, \\ d\sigma_t^2 &= \kappa(\theta - \sigma_t^2)dt + \nu\sigma_t dW_t^{(2)}, \end{aligned}$$

mit $r(t) = \frac{1}{100}(\sin(2\pi t) + t + 3)$, $\kappa = 2$, $\theta = 0.4$, $\nu = 0.2$ und den Startwerten $S_0 = 100$, $\sigma_0 = 0.25$, bei dem sowohl der Preis S als auch die Volatilität σ durch eine SDGL gegeben sind. Die Zuwächse des Prozesses $(W_t^{(1)}, W_t^{(2)})$ seien für einen Zeitschritt der Länge h $\mathcal{N}(0, h\Sigma)$-verteilt mit Kovarianzmatrix

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}, \qquad \rho = 0.2.$$

(i) Implementieren Sie in Matlab/Python das **Euler-Maruyama-Verfahren** für das Heston-Modell, wobei das Zeitintervall die Länge 1 haben soll und 100 Zeitschritte verwendet werden sollen. Bestimmen Sie approximativ den Mittelwert und die Varianz von S_1 und schauen Sie sich einige Lösungspfade an.

(ii) Lösen Sie für den gleichen Zuwachs von $W_t^{(1)}$ aus Teil (i) die Gleichung

$$dU_t = r(t)U_t dt + \sqrt{\theta}U_t dW_t^{(1)}, \qquad U_0 = S_0$$

ebenfalls mit dem Euler-Maruyama-Verfahren und vergleichen Sie die Pfade von U mit denen von S in einem gemeinsamen Schaubild. Was beobachten Sie, falls in (i) $\sigma_0 \approx \sqrt{\theta}$ gilt?

Hinweis: Um $\mathcal{N}(0, h\Sigma)$-verteilte Pseudozufallsvektoren zu erhalten, schreiben Sie eine **Nc**-Funktion, welche den Algorithmus aus der Vorlesung beinhaltet. Hilfreich sind hier die Befehle `chol` und `repmat` (Python `np.linalg.cholesky` und `np.tile`).

Aufgabe 4.2 (6 Punkte)

a) Implementieren Sie in Matlab den linearen Kongruenzgenerator

$$z_{i+1} = (az_i + c) \bmod m, \quad i = 0, \dots, N-1$$

für $a = 2^{16} + 3$, $c = 0$ und $m = 2^{31}$. Setzen Sie für $z_0 \in \{1, \dots, m-1\}$ anschließend $x_i := \frac{z_i}{m}$. Bilden Sie aus der daraus erhaltenen Folge von PZZ

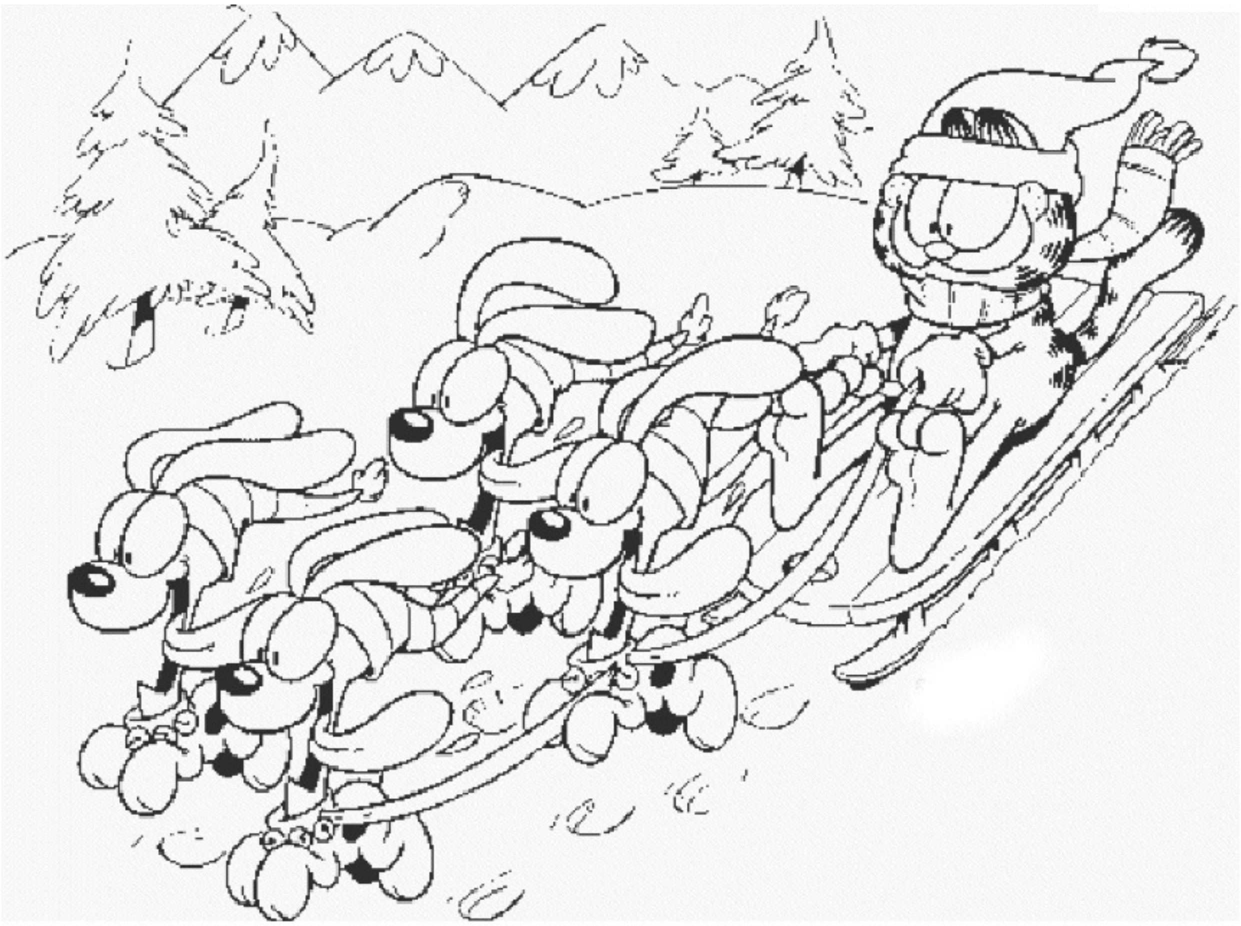
$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3, \dots$$

5000 Punktepaare $(x_0, x_1)^T,\ (x_2, x_3)^T, \ldots$ bzw. Tripel $(x_0, x_1, x_2)^T,\ (x_3, x_4, x_5)^T, \ldots$ und veranschaulichen Sie diese im zweidimensionalen Einheitsquadrat bzw. dreidimensionalen Einheitswürfel.
Hinweis: Hier können die Matlab-Befehle `mod` und `reshape` hilfreich sein (Python `%` und `np.reshape`).

b) Zeigen Sie: Die durch den Generator aus Teil a) erzeugten Tripel $(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})^T \in \mathbb{R}^3$, $i \geq 0$ liegen in $(0,1)^3$ auf 15 Hyperebenen, von welchen je zwei benachbarte den Abstand $\frac{1}{\sqrt{118}}$ haben.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst für $i \geq 0$: $\exists\, k \in \mathbb{Z}:\ 9x_i - 6x_{i+1} + x_{i+2} = k$ und folgern Sie, dass k nur 15 verschiedene Werte annehmen kann.

Aufgabe 4.3 **(6 Punkte)**

Bringen Sie Farbe in Garfield's Leben damit auch er es rechtzeitig zum Weihnachtsfest nach Hause schafft.



Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr 2024!