Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statsitik
Johannes Schropp
Jan Rohleff

Wintersemester 2023/2024

Numerik stochastischer Differentialgleichungen

https://www.math.uni-konstanz.de/~rohleff/numsde.html

5. Übungsblatt

Ausgabe: 08.01.2024, Abgabe: 15.01.2023, bis 10.00 Uhr

Aufgabe 5.1 (6 Punkte)

Implementieren Sie in Matlab/Python für das Zeitintervall $[0,1]$ das **Euler-Maruyama-Verfahren** für die Differentialgleichung

$$dS_t \quad = \quad \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \qquad S_0 = 1, \qquad \mu = 1.0, \qquad \sigma = 0.5 \tag{1}$$

mit der exakten Lösung

$$\bar{S}_t \quad = \quad \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t\right). \tag{2}$$

Bestimmen Sie die Approximation $\tilde{\varepsilon}(h_i)$ des maximalen zeitlichen Fehlers $\varepsilon(h_i)$ für die Schrittweiten $h_1 = \frac{1}{20}$, $h_2 = \frac{1}{40}$, $h_3 = \frac{1}{60}$ und $h_4 = \frac{1}{80}$ (vgl. Bemerkung 2.7 im Skript) und berechnen Sie die starke Konvergenzordnung, in dem Sie die Steigung der Fehlerkurve in doppeltlogarithmischer Auftragung ermitteln, d. h. zeichnen Sie das Paar $(\ln(h_i), \ln(\tilde{\varepsilon}(h_i)))$ in ein $(\ln(h), \ln(\tilde{\varepsilon}))$-Diagramm und bestimmen Sie die Steigung der daraus resultierenden Geraden. Nutzen Sie dafür den Matlab-Befehl `polyfit` (Python `np.polyfit`).

Aufgabe 5.2 (6 Punkte)

Implementieren Sie in Matlab/Python für das Zeitintervall $[0,1]$ das **Milstein-Verfahren**

$$\hat{S}_{t_{n+1}} = \hat{S}_{t_n} + \mu \hat{S}_{t_n} h + \sigma \hat{S}_{t_n} \Delta W_{t_n} + \frac{1}{2}\sigma^2 \hat{S}_{t_n} \left((\Delta W_{t_n})^2 - h\right), \qquad \hat{S}_0 = 1$$

für die Differentialgleichung (1). Vergleichen Sie das Ergebnis mit den Lösungen aus Aufgabe 1, in dem Sie mehrere Pfade der exakten Lösung (2) zusammen mit den approximativen Pfaden des Milstein-Verfahrens und des Euler-Maruyama-Verfahrens für die Schrittweite $h = 1/1000$ in ein Schaubild zeichnen. Bestimmen Sie zudem approximativ die starke Konvergenzordnung des Milstein-Verfahrens (analog zu Aufgabe 1).

Aufgabe 5.3 (6 Punkte)

a) Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion und $c_1, \ldots, c_n$ nichtnegative Konstanten mit $\sum_{i=1}^n c_i = 1$. Zeigen Sie, dass dann für beliebige $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$

$$f\left(\sum_{i=1}^n c_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n c_i f(x_i)$$

gilt.

b) Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Zeigen Sie zunächst:

$$\forall\, y \in \mathbb{R}\, \exists\, s \in \mathbb{R}\, \forall\, x \in \mathbb{R} : \varphi(x) \geq \varphi(y) + s(x-y),$$

und folgern Sie dann für $X \in L^1(\mathbb{R})$ und $\varphi(X) \in L^1(\mathbb{R})$ die Abschätzung

$$\varphi(E(X)) \leq E(\varphi(X)).$$

c) Seien $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ gegeben und $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $\varepsilon_j \geq 0$ und

$$\varepsilon_0 \;\leq\; \gamma_1, \quad \varepsilon_j \;\leq\; \gamma_1 + \gamma_2 \sum_{l=0}^{j-1} \varepsilon_l, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Zeigen Sie:

$$\varepsilon_j \;\leq\; \gamma_1 \exp(j\,\gamma_2), \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$